JNOTES

傅立叶变换、 时域→频域

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}\,dt$$

$$\mathcal{F}[f(t)]=F(w)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\,e^{jwt}\,dw$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)]=f(t)$$

例：求指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ e^{-\beta t} & (t>0)\end{cases}\quad(\beta>0)$$ 傅氏变换

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-jwt}\,dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\beta t}\cdot e^{-jwt}\,dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(\beta+jw)t}\,dt=-\frac{1}{\beta+jw}\,e^{-(\beta+jw)t}\Big|_0^{\infty}$$

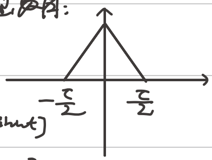
$$=\frac{1}{\beta+jw}=\frac{\beta-jw}{\beta^2+w^2}$$

例. 三角脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}\left(t+\frac{\tau}{2}\right) & -\frac{\tau}{2}<t<0\\ -\frac{2E}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right) & 0<t<\frac{\tau}{2}\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

f(t)是一个偶函数

函数图：



$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\cos wt-j\sin wt]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\cos wt=2\int_0^{\frac{\tau}{2}}-\frac{2E}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cos wt\,dt$$

$$=\frac{8E}{\tau w^2}\sin^2\frac{w\tau}{4}$$

日期:　　　/

单位脉冲函数

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ +\infty & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

$q(t)$ 电荷　　$q(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$

$$i(t)=q'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

$t\neq 0$　$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0}{\Delta t}=0$；　$t=0$时. $i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(\Delta t)-1}{\Delta t}$

$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-1}{\Delta t}=\infty$

$\therefore i=i(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$

(1) 筛选性质：　$f(t)$ 连续　$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$

例：. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$

$\mathcal{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\underbrace{e^{-j\omega t}}_{f(t)}dt=f(0)=1$

(2) 坐标、缩放性质

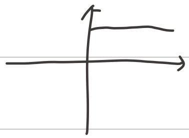
$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$　令 $a=-1$　$\delta(-t)=\delta(t)$　偶函数.

(3) $\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$

(4) $g(t)$ 连续　$g(t)\cdot\delta(t-t_0)=g(t_0)\delta(t-t_0)$

单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$　　$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$

$u(t)=\frac{1}{2}[1+sgn(t)]$　　$sgn(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$

广义傅里叶变换

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$　$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]=e^{-i\omega t_0}$

$\mathcal{F}^{-1}[1]=\delta(t)$　$\mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega t_0}]=\delta(t-t_0)$

$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$　$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\mathcal{F}[sgn(t)]=\frac{2}{i\omega}$　　$\cos\omega t+i\sin\omega t$

$\mathcal{F}^{-1}[\frac{2}{i\omega}]=sgn(t)$　　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega=sgn(t)$

$u(t)=\frac{1}{2}[1+sgn(t)]$　线性性质: $\mathcal{F}[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]=k_1F_1(\omega)+k_2F_2(\omega)$

$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{i\omega}]$

$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$

日期: /

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t]=\pi i[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

性质：1.线性性质

例：$f(t)=A+B\cos\omega_0 t$

$\mathcal{F}(1)=2\pi\delta(\omega)$ $\quad\mathcal{F}(\cos\omega_0 t)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

$F(\omega)=A\cdot 2\pi\delta(\omega)$ $\quad\therefore\mathcal{F}[f(t)]=A\cdot 2\pi\delta(\omega)+B\cdot\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

2.对称性：$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$

$$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$$

3.位移：$\mathcal{F}(f(t\pm t_0))=e^{\pm i\omega t_0}F(\omega_0)$

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0(t-3)]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\cdot e^{-3i\omega}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega\pm\omega_0)]=e^{\mp i\omega_0 t}f(t)$$

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{i}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

4.坐标缩放性质：

$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ $\quad\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

日期: /

5. 乘积定理:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega$$

6. 能量积分 (parseval 定理)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 dt$$

日期:　　　/

复数及其运算.

一、表示、相关定义　　x：实部 $Re(z)$

y：虚部 $Im(z)$

r：z的模长 (ρ)　　$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$

θ：z的辐角 (φ)　　$Argz=\theta+2k\pi$　$k=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots$

$argz=\theta$　$-\pi<\theta<\pi$　主辐角.

2. $z=re^{i\theta}$　指数表示

3. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　三角表示

欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

二、复数的运算：

$z_1=x_1+iy_1$　$z_2=x_2+iy_2$.

1. $\bar{z}=x_1-iy_1$　(共轭复数)

2. $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$

3. $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

4. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$

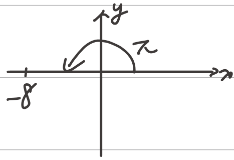
5. $z^n=\rho_1^ne^{in\varphi_1}=\rho^n[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi_1)]$

日期:　　/

例: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}=\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{\frac{i(\arg z+2k\pi)}{n}}$

有n个值 ⇒ k取到n-1

$-8+0i$　　$z=\rho\cdot e^{i\varphi}=8e^{i(2k\pi+\pi)}$



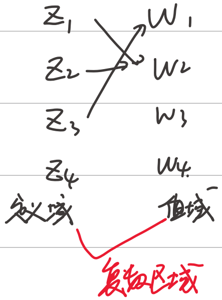
$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\cdot e^{i\frac{2k\pi+\pi}{3}}$　　$k=0,1,2$　代入

$2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{i\pi}$, $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$　即 $2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$, -2, $2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$

2.柯西黎曼方程.

一.定义:

若在复平面上存在点集E, 对于E中的每一个点按一定规律, 有一个或多个复数值w与z对应, 则称w为z的函数 — 复变函数.



$w=f(z)\quad z\in E$

$=u(x,y)+iv(x,y)$

二.导数

$w=f(z)\quad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在, 与 $\Delta z\to 0$ 方式无关

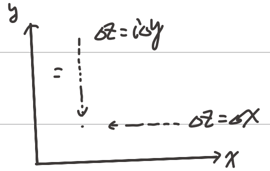
$$\Rightarrow f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

求导法则: 同实变函数

三.柯西-黎曼方程(C-R方程) - f(z)在z点可导的必要条件.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

推导:



路径一: $f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]$

$=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$

路径二: $f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\frac{v(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}\right]$

$=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

可导充要条件.

$f(z)=u+iv$ 在 $z=x+iy$ 处可导 $\Leftrightarrow \begin{cases} u,v \text{ 在 } (x,y) \text{ 可导} \\ \text{满足 C-R 方程} \end{cases}$

导数值 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

解析函数

1、定义：$w=f(z)$ 在某点 z_0 的某个邻域 $0\le|z-z_0|\le\delta$ 处处可导，则 $f(z)$ 在 z_0 解析。

不解析的点 → 奇点

2. 判定：$f(z)=u+iv$ 在区域D内解析

⟺ u,v 在区域D内可导且满足 C-R方程

⟺ $f(z)$ 在区域D内处处可导。

eg1. $f(z)=x^2+iy^2$. 判断 $f(z)$ 在何处可导，何处解析

解：$u=x^2$，$v=y^2$　代入C-R方程：$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=2y\\ 0=0\end{cases} \Rightarrow x=y$.

直线不能构成区域

∴ $f(z)$ 在 $x=y$ 上可导，在复平面上处处不解析

3. 关系.

连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 可导 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 解析

不连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 不可导 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 不解析

4. 性质

$u(x,y)$，$v(x,y)$ 均为调和函数 ⟶ $\varphi(x,y)$：$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$

$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{cases}$

若具有二阶连续导数且满足 Laplace方程 ⟶ 调和函数

$\Delta u(x,y)=0$

推导: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ $\Rightarrow$ 相加可得. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

☆解析函数的虚部 v 称为实部 u 的共轭调和函数 (u 不是 v 的)

2. 已知解析函数的虚(实)部. 求解析函数

C-R方程: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + h(y)$ ☆

$\downarrow$

$v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} dx + h(y)$

$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx + h'(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$

$\downarrow$

$h'(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx$

$h(y) = \int h'(y) dy + C$

最后一步: 把 $x=z$, $y=0$ 代入 $f(z)=u+iv$ (技巧)

日期: /

初等复变函数.

一. 指数函数

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$e^z = e^{z+i\cdot 2k\pi} \qquad T=2k\pi i$$

二、三角函数

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

由 e^{iz} 推导仍有周期性 $T=2\pi$

注: $|\sin z|\le 1$. $|\cos z|\le 1$ 不成立

三. 双曲函数

$$\mathrm{sh}z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{ch}z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$T=2\pi i$

五: 幂函数:

$$a^b = e^{b\ln a}$$

四. 对数函数

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad \text{主值}$$

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\mathrm{Arg} z$$

eg1: $\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$

虚部.

eg2. $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ $\quad \mathrm{Re}(z) = $ 实部 $= \ln 2$. $\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$e^z = 1+\sqrt{3}i \qquad z = \mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln|1+\sqrt{3}i| + i\mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}i)$

$= \ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$

解析函数的积分

一、定义

柯西定理：

单连通域

若$f(z)$在曲线C围成的区域内解析 $\Rightarrow \oint_C f(z)=0$ (只与起、终点有关)

柯西积分公式：

一、定义：

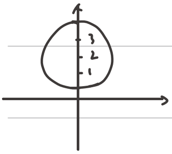
$f(z)$在曲线C及内部解析，z_0在C内 有 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)}$$

eg1 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = ?$

解：原式 $= \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0}dz = 2\pi i e^z\Big|_{z=0} = 2\pi i$

eg2: $\oint_C \frac{e^z}{z(z-2i)}dz = ?$　$C: |z-3i|\le r$　其中 $2<r<3$



令$f(z)=\frac{e^z}{z}$

$\therefore$ 原式 $= \oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{z-2i}dz = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi(\cos 2 + i\sin 2)$

eg: 求 $\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$

令 $f(z)=\cos z$　$f''(z)=-\cos z$

$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$

$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0) = -\pi i \cos i$

二、推论：

n阶导数：$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$　$\Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

日期: /

复变函数的积分

复数列与复级数

一. 复数列 $\{\alpha_n = a_n + ib_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ 则 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a + bi$

复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

收敛 $\Leftrightarrow$ 实部 虚部均收敛

二. 收敛与收敛半径

判断是否收敛: ①比值法: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \rho<1 & \text{绝对} \\ \rho>1 & \text{发散/条件收敛} \end{cases}$ $R=\frac{1}{\rho}$ $|z|<R$

②根值法. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \rho<1 & \text{收敛.} \\ \rho>1 & \text{发散/条件收敛} \end{cases}$ $R=\frac{1}{\rho}$ $|z|<R.$

1. 绝对收敛: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

2. 条件收敛: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 不收敛. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 发散. 则 $|z|>|z_0|$ 处发散.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 收敛. 则 $|z|<|z_0|$ 处绝对收敛

日期:　　/

泰勒级数:

$f(z)$在圆域$|z-z_0|<R$解析，则函数在解析圆域内可展开成幂级数(即泰勒级数)且展开式唯一: $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

常用幂级数展开:

$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \qquad =\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad |z|<1.$

$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \qquad =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad |z|<1$

$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \qquad =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad 0<|z|<+\infty.$

$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \qquad =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad 0<|z|<+\infty.$

$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!}+\cdots \qquad =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!} \qquad 0<|z|<+\infty.$

函数.　　　　幂级数　　　　收敛域

日期:　　　/

泰勒级数的总结与习题

收敛域写成：$|z-\underline{\underline{展开点}}|<$ 收敛半径

收敛半径：奇点到展开点的最短距离

核心思路：①四则运算（乘除化加减）

②变量代换 令 $\frac{z-z_0}{a}=z_1$

③求导 } 逐项运算

④积分

注：在 $z=z_0$ 处展开，含有 $(z-z_0)$ 的项不用展开

eg1. 将 $f(z)=\frac{1}{(1+z)^2}$ 在 $z=0$ 处展开为泰勒级数

$$\left(-\frac{1}{1+z}\right)'=\frac{1}{(1+z)^2}$$

$$-\frac{1}{1+z}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=\left[-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n\right]'=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot z^{n-1}\quad |z|<1$$

eg2. 将 $f(z)=\cos^2 z$ 展开成 Taylor 级

$$\cos^2 z=\frac{1+\cos 2z}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2z$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\quad |z|<+\infty$$

日期: /

eg3. $f(z)=\frac{z-1}{z^2}$ 在 $z=1$ 处展开 $(z-1)$

$=(z-1)\cdot\frac{1}{z^2}$

$(-\frac{1}{z})'=\frac{1}{z^2} \Rightarrow (-\frac{1}{1+z-1})'=[(-1)^{n+1}\cdot(z-1)^n]'$

$=(-1)^{n+1}\cdot n(z-1)^{n-1}$

$\Rightarrow f(z)=(z-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot(z-1)^{n-1}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n(z-1)^n \qquad |z-1|<1$

eg4: 将 $f(z)=\frac{1}{3z-2}$ 分别在 $z=0$ 处和 $z=2$ 处展开成 Taylor 级数.

1° 在 $z=0$ 处 $f(z)=-\frac{1}{2-3z}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}z}=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{2}z)^n \qquad |\frac{3}{2}z|<1$

$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}z^n \qquad |z|<\frac{2}{3}$

2° 在 $z=2$ 处 $f(z)=\frac{1}{3(z-2)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4}(z-2)}$

$=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot[\frac{3}{4}(z-2)]^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^n}{4^{n+1}}(z-2)^n \qquad |z-2|<\boxed{\frac{4}{3}}$

eg5: 将 $f(z)=\frac{z}{z+2}$ 在 $\boxed{z=1}$ 处展开为 Taylor 级数

$f(z)=\frac{z-1+1}{z-1+3}=\frac{z-1}{z-1+3}+\frac{1}{z-1+3}$ 也可以先分离常数再做

$=(z-1)\cdot\frac{1}{z-1+3}+\frac{1}{z-1+3}$

$\frac{1}{z-1+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{z-1}{3})^n$ 代入

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n+1}}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}} \qquad |z-1|<3$

日期:　　/

洛朗级数:

洛朗展开系数

1. 定义: $f(z)$ 在圆环域 $r<|z-\alpha|<R$ 内处处解析, 则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot(z-z_0)^n$

$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$　$n\in Z$

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$

eg 将 $f(z)$ 分别在下列圆环域内展开成洛朗级数

(1) $0<|z-1|<1$　(2) $1<|z-2|<+\infty$　(3) $0<|z|<1$

(4) $1<|z|<2$　(5) $2<|z|<+\infty$

解: (1) $f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}=\frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}$

(2) $f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$　$0<\frac{1}{z-2}<1$ 在收敛域内

$=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n-2}$

(3) $f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{z-1}-\frac{1}{z-2}$

$\frac{-1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2-z}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$

(4) $1<|z|<2$

$\frac{-1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$　$\left|\frac{1}{z}\right|<1$ 在收敛域内

$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$　$\left|\frac{z}{2}\right|<1$

$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)$

(5) $2<|z|<+\infty \quad 0<\left|\frac{1}{z}\right|<\frac{1}{2} \quad 0<\left|\frac{2}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}(2^n-1)$$

技巧: $|z-a|$ 一般直接凑　$|z|$ 一般先列项再凑

eg: 将 $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数

(1) $0<|z|<1$　(2) $1<|z|<2$　(3) $2<|z|<+\infty$　(4) $1<|z+2|<+\infty$

(1) 解 $f(z)=\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

(2) 解 $f(z)=\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2+z}$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(3) 解 $f(z)=\frac{1}{1+z}-\frac{1}{2+z}$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{2}{z}+1}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

(4) $1<|z+2|<+\infty$

解: $f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}$

$$=\frac{1}{z+2-1}-\frac{1}{z+2}$$

$$=\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z+2}}-\frac{1}{z+2}$$

$$=\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2}\right)^n-\frac{1}{z+2}$$

日期:　　/

洛朗级数总结与习题.

Tips: ① 级数只有加、减，无乘除　② $\frac{1}{1+z}$ 与 $\frac{1}{1-z}$ 无本质区别

③ Taylor 与洛朗级数的区别

1. 展开域不同：Taylor：圆域　洛朗：圆环域

2. 求和：Taylor：$\sum_{n=0}^{\infty}$　0 1 …… ……

洛：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$　$-\infty$ …… -1 0 1 …… …… $+\infty$ 双边幂级数

基本思路与 Taylor 类似. 一定要确保在收敛域内展开 !!

例如：需要用到 $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$　$|z|<1$

$1<|z|<2 \Rightarrow |\frac{z}{2}|<1$　　$|\frac{1}{z}|<1$

$2<|z|<+\infty \Rightarrow |\frac{1}{z}|<1$　　$|\frac{2}{z}|<1$

$1<|z-1|<+\infty \Rightarrow |\frac{1}{z-1}|<1$

eg 1: 将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)^2}$ 在 $0<|z-2|<1$ 内展开成洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{(z-3)^2}$$

$$\left(\frac{1}{3-z}\right)'=\frac{1}{(z-3)^2}\qquad \frac{1}{3-z}=\frac{1}{1-(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

$$\therefore \frac{1}{(z-3)^2}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\right]'=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}n(z-2)^{n-1}}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n(z-2)^{n-2}$$

日期: /

eg2: 求 $f(z)=\frac{\sin z^3}{z^6}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式

解: $f(z)=\sin z^3 \cdot \frac{1}{z^6}=\frac{1}{z^6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{6n-3}}{(2n+1)!}\quad 0<|z|<+\infty$

eg3: $f(z)=z\cdot\cos\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式

$f(z)=z\cdot\cos\frac{1}{z}=z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(\frac{1}{z})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-2n+1}}{(2n)!}\quad 0<|z|<+\infty$

eg4: 求 $f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式

$f(z)=z^2\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{z})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+2}}{n!}\quad 0<|z|<+\infty$

eg5: 求 $f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 分别在 $0<|z|<1$ 与 $1<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式

① $0<|z|<1$: $f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{z+1}{z-1}$

$=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{z^2}\left(1-2\cdot\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{z^2}\left(1-2\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)$

$=\frac{1}{z^2}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-2}$

② $1<|z|<+\infty$: $f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\left(1+\frac{2}{z-1}\right)=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{z}}\right)$

$=\frac{1}{z^2}\left[1+\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right]=\frac{1}{z^2}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+3}}$

日期:　　/

零点、孤立奇点

1. 零点与零点的级:

定义: $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$解析且$g(z_0)\neq 0$, 则z_0是$f(z)$的m级零点

注: 1° $g(z_0)\neq 0$ → 确保$f(z)$不恒为0的解析函数

2° 零点的级就是$(z-z_0)$的幂

判定方法: $f^{(n)}(z_0)=0$ 且 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$, $n<m$. 则z_0是$f(z)$的m级零点

常用结论: z_0是$f(z)$的m级零点, 是$g(z)$的n级零点

则: ① z_0是$f(z)\cdot g(z)$的$(m+n)$级零点

② z_0是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的$(m-n)$级零点

极点与极点的级

奇点: $f(z)$不解析的点

孤立奇点: $f(z)$在z_0处不解析, 但是在z_0的某一个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析

→ 无限个

$f(z)$展开式$(z-z_0)$负幂项的个数

$+$ 正幂项

$-$ 负幂项

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + C_0 + \cdots + C_m(z-z_0)^m$$

→ 可去奇点

→ 极点 (m级奇点)

→ 本性奇点

孤立奇点	个数
在z_0点	
可去奇点	0
m级极点	m
本性奇点	∞

极点是特殊的奇点

日期: /

常用结论：① z_0是$f(z)$的m级零点 ⇒ z_0是$\frac{1}{f(z)}$的m级极点

② z_0是$f(z)$的m级零点，$g(z)$的n级零点 ⇒ z_0是$\frac{g(z)}{f(z)}$的m-n级极点

求极点 ⇒ 转化成求零点问题

⊕ 奇点类型的判定问题

法一：求极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \begin{cases} c\,(\neq 0) \to \text{可去奇点} \\ \infty \to \text{极点} \\ \text{不存在且不为}\infty \to \text{本性奇点} \end{cases}$ ⊕

法二：展开法

将$f(z)$展开成$z=z_0$处去心邻域的洛朗级数 → 展开域：圆环域

注：当采用求极限方法判断出z_0为极点时，通常采用“$\frac{\cdot}{\cdot}$常用结论”+零点判定方法来求解 / 定义

eg1：$f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$

解：$\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{e^z}{(z-1)^2} = \infty$ 极点

$f(z) = \dfrac{1}{\frac{1}{e^z}(z-1)^2}$ 由定义 $f(z) = (z-z_0)^m\cdot g(z)$，$g(z)$解析且$g(z_0)\neq 0$ 则z_0是m级零点

$g(z)$ ∴ $z=1$是$f(z)$的2级极点

展开法：$f(z)$在$z=1$的去心邻域内的洛朗级数

$0<|z-1|<\delta$ $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}\cdot e^z = \dfrac{e}{(z-1)^2}\cdot e^{z-1} = \dfrac{e}{(z-1)^2}\left(1+(z-1)+\dfrac{1}{2!}(z-1)^2+\cdots+\dfrac{1}{m!}(z-1)^m\right)$

$= \boxed{\dfrac{e}{(z-1)^2}+\dfrac{e}{z-1}} + \dfrac{e}{2!} + \cdots$

负幂次项阶数为2

日期:　　/

eg 2: $f(z)=\dfrac{1}{z^m(z^2+1)^2}$　　$z=0,\ z=\pm i$

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z^m\cdot(z^2+1)^2}=\infty$

$\lim\limits_{z\to \pm i}\dfrac{1}{z^m\cdot(z^2+1)^2}=\infty$

1' $z=0$　z_0是$f(z)$的m级零点 $\Rightarrow$ 是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级极点

$g(z)=z^m\cdot(z^2+1)^2$　$g(z)\neq 0$ $\Rightarrow$ m级零点

$\therefore$ $f(z)$是m级极点

2' $z=\pm i$, $h(z)=z^m(z^2+1)^{2}$　$z=\pm i$是$h(z)$的二级零点

$\neq 0$

$\therefore$ $z=\pm i$是$f(z)$的2级极点

日期:　　/

留数的定义与计算

一. 定义

$f(z)$在奇点z_0处的留数：$Res[f(z_0), z_0] = C_{-1}$

C_{-1}：$f(z)$在z_0为中心的圆环域内洛朗级数的-1系数.

$z_0 \rightarrow f(z)$的一个孤立奇点

→留数. $Res[f(z), z_0]$ / $\underset{z=z_0}{Res} f(z)$

$$f(z) = \cdots + C_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots + \underbrace{C_{-1}(z-z_0)^{-1}}_{-1次项} + C_0 + \underbrace{C_1(z-z_0)}_{1次项} + \cdots + C_n(z-z_0)^n$$

−1次项系数.

二. 求留数

规则 I：若z_0为$f(z)$的一级极点. 则$Res[f(z), z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

规则 II：若z_0为$f(z)$的m级极点. 则$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\boxed{\{(z-z_0)^m f(z)\}}$

求$m-1$阶导数.

eg. $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$　计算$Res[f(z), 0]$

$z_0=0$是$f(z)$的2级极点

$$Res[f(z), 0] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\{z^2\cdot\frac{\sin z}{z^3}\} = \lim_{z\to 0}\frac{d(\frac{\sin z}{z})}{dz} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z\cdot z - \sin z}{z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - z\sin z - \cos z}{2z} = \frac{-(\sin z + z\cos z)}{2} = 0$$

留数定理

留数: z_0 为孤立奇点, 在其去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 包含 z_0 的简单闭合曲线 C: $\oint_C f(z)dz$ 除以 $2\pi i$

→ $f(z)$ 的一个孤立奇点

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \Rightarrow \oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot \mathrm{Res}[f(z),z_0]$$

→ C必须包含 z_0

(留数的..推论)

留数定理:

$f(z)$ 在D内除有限个奇点外, 其他地方处处解析, C是D内包围诸奇点的曲线

则 $\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

即: $\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$ (若C内包围没有奇点, 则积分为0)

eg. 计算 $\oint_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$

1. 判断孤立奇点
2. 求留数

解. $f(z)=\frac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|=2$ 内有 $z=0$ 和 $z=1$ 两个极点

$z=0$: 1级　$z=1$: 2级

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{5z-2}{z(z-1)^2}=-2$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{d\left(\frac{5z-2}{z}\right)}{dz}=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^2}=2$$

$$\therefore \oint_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz=2\pi i(-2+2)=0$$

日期: /

留数的计算与留数定理问题与总结

留数计算

1° z_0为可去奇点 → 则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$

2° z_0为本性奇点 → 将 $f(z)$ 展开为洛朗级数 C_{-1} → 定义

3° z_0为极点

- 规则I: 一级 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$
- 规则II: m级 $(m>1)$ $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$

  → 直接展开 C_{-1}

留数定理求积分总结:

1° 找出积分区域内的孤立奇点

2° 判定类别 3° 计算留数 4° 代入公式

日期: /

留数定理求积分——三角有理式的积分

定积分 → 曲线积分 → 留数th

$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$ 　　令 $z = e^{i\theta} \Rightarrow |z|=1$

$z = x+iy = re^{i\theta}$ 　　$dz = de^{i\theta} = i e^{i\theta} d\theta = iz\,d\theta$

$\therefore d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[R(z), z_k]$$

例: 求 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\,d\theta \quad a>1$

原式 $= \oint_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2+2az+1}\,dz = \oint_{|z|=1} f(z)\,dz$

令 $z^2+2az+1=0 \Rightarrow z_1 = \sqrt{a^2-1}-a \quad z_2 = -\sqrt{a^2-1}-a$ (舍去)

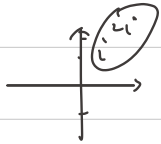
$\because f(z)$ 在 $|z|=1$ 内 $f(z)$ 有1个一级极点, $z=\sqrt{a^2-1}-a$

$\operatorname{Res}[f(z), \sqrt{a^2-1}-a] = \lim\limits_{z\to\sqrt{a^2-1}-a} (z-\sqrt{a^2-1}+a)f(z) = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}$

$\therefore$ 原式 $= 2\pi i \cdot \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

留数定理求积分 —— 有理分式的反常积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \text{Res}[f(z), z_k]$，$z_k$为$f(z)$在上半平面的奇点



例1. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+5x^2+4}dx$

令$f(z)=x^4+5x^2+4=(x^2+4)(x^2+1) \Rightarrow x_1=x_2=\pm i \quad x_3=x_4=\pm 2i$

上半平面的极点：$z_1=i \quad z_2=2i$

∴在上半平面上有2个一级极点即为 $z_1=2i \quad z_2=i$

$\text{Res}[f(z), z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

$\text{Res}[f(z), z_1]=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z-2i}{(z^2+4)(z^2+1)}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)(z^2+1)}=\frac{i}{12}$

同理：$\text{Res}[f(z), z_2]=\lim_{z\to z_2}(z-i)\frac{z-i}{(z^2+4)(z^2+1)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z^2+4)(z+i)}=-\frac{i}{6}$

$I=2\pi i\left(\frac{i}{12}-\frac{i}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$

例2：求：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$

令$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+4)^2}=0$ ∴ $z_1=2i \quad z_2=-2i$（舍）

$\text{Res}[f(z), z]=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[(z-2i)^2\cdot\frac{z^2}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right]$

$=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z^2+2i)^2}\right]=-\frac{i}{8}$

∴ $I=2\pi i\cdot\frac{-i}{8}=\frac{\pi}{4}$

留数定理求积分 —— 有理分式与e指数乘积的反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cdot e^{aix}dx = 2\pi i\sum_{k=0}^{n} Res[f(z), z_k]$$

有理分式

上半平面内

$$e^{aix} = \cos ax + i\sin ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)[\cos ax + i\sin ax] = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax dx + i\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0 & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$ ⇒ 避倍奇零.

例1: 计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ $\quad \cos ax \Rightarrow e^{aiz}$

解. 令 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$

$(z+i)(z-i)=0 \Rightarrow z_1 = i \quad z_2 = -i$(舍)

∴在上半平面有一阶极点 $z=i$

$$Res[f(z), z] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{e^{iz}}{(z_0+i)(z_0-i)} \overset{z_0=1}{=} -\frac{i}{2e}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = 2\pi i\cdot\frac{-i}{2e} = \frac{\pi}{e}$$

$$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e}$$

例2: 计算 $I = \int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}I_0$ $\quad \sin ax \Rightarrow e^{aiz}$

令 $f(z) = \frac{z\cdot e^{iz}}{1+z^2} = \frac{z\cdot e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$

令 $(z+i)(z-i)=0 \Rightarrow z_1 = i \quad z_2 = -i$(舍)

$Res[f(z), i] = \frac{-i}{2e} \quad \therefore I_0 = 2\pi i\cdot\frac{-i}{2e} \quad \therefore I = \frac{\pi}{2e}$

Fourier 傅里叶变换

1. δ函数：单位冲激函数，冲激函数

性质：① $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

② $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

2. 傅里叶变换

① $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}[f(t)]$ 时域→频域

② $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ 逆变换

补充：$e^{-j\omega t}\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega+a)$

$\delta(t+a)\xrightarrow{\mathcal{F}}e^{-j\omega t}$

常见的傅里叶变换对：

$e^{-\beta t}\ (t\geq 0,\ \beta>0)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{\beta+j\omega}$

$\delta(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}1$

$1\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega)$

$\sin\omega_0 t\xrightarrow{\mathcal{F}}j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

$\cos\omega_0 t\xrightarrow{\mathcal{F}}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

日期:　　/

常用傅里叶变换的性质

1. $\mathcal{F}[f(t+t_0)] = \boxed{e^{j\omega t_0}}\mathcal{F}[f(t)]$　　$\mathcal{F}[\boxed{e^{j\omega_0 t}}f(t)] = F(\omega-\omega_0)$

2. $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega\mathcal{F}[f(t)]$　　$\mathcal{F}[tf(t)] = -\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f(t)] = -F'(\omega)$

3. $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt] = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[f(t)]$

4. $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

5. $\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \mathcal{F}[f(t)]\cdot\mathcal{F}[g(t)]$

卷积