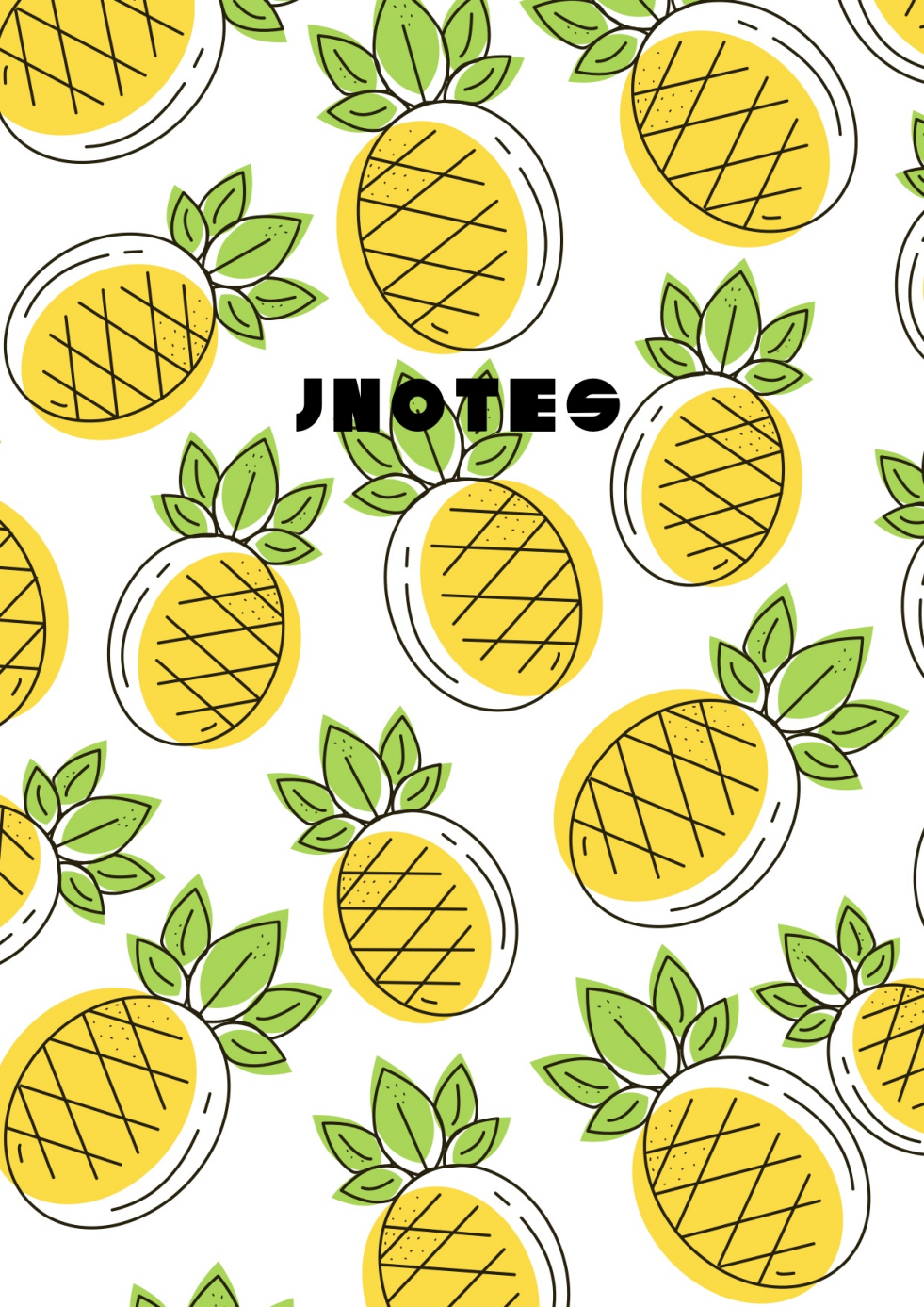


The background of the entire page is a repeating pattern of stylized pineapples. Each pineapple is depicted with a bright yellow body, a black outline, and a crown of five green leaves. The pineapples are arranged in a scattered, overlapping manner across the white background.

NOTES

日期: /

绪论:

数字信号处理就是用数值计算的方法对信号进行处理

数字信号来源 - ① 计算机输入输出信号

② 数码设备的信号

③ 模拟信号数字化 $\rightarrow$ 数字信号

--- 的实现: ① 基于软件数值运算

② 基于软件数值信号处理系统

... 的特点: ① 灵活性 ② 高精度和高线性 ③ 便于大规模集成

序列的表示:

连续时间信号表示:

离散 ---

$$f(t) = \sin t$$

$$x(n) = \sin n$$

$\omega = 2\pi f$: 模拟域频率

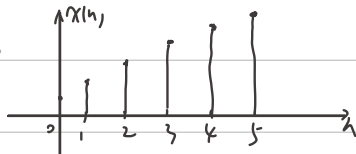
ω : 数字域频率

1. 集合符号表示:

$$X(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{--- 表示 } n=0$$

$$2. \text{公式: } x(n) = \sin n \quad n \in (-\infty, +\infty) \quad x(n) = a^n \quad n \in (-\infty, +\infty)$$

3. 图形



日期: /

典型序列.

1. 单位脉冲序列: $\delta(n)$

$$\delta(n) = \{ \dots, 0, \underline{1}, 0, \dots \} \quad \text{加权: } a\delta(n) \quad \text{移位: } \delta(n-n_0)$$

用单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的移位及其加权和表示任意序列 $x(n)$

2. 单位阶跃序列: $u(n)$

$$u(n) = \{ \dots, 0, \underline{1}, 1, 1, \dots \} \quad \text{加权: } au(n) \quad \text{移位: } au(n-n_0)$$

$$u(0) = 1$$

3. 矩形序列: $R_N(n)$

N : 矩形序列样值的个数 n : 原变量

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad g(n) = u(n) - u(n-1)$$

4. 复指数序列: $a^n u(n)$

$$5. \text{复指数序列: } e^{(r+j\omega_0)n}$$

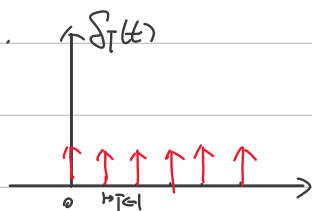
$$= \boxed{e^{rn}} \cdot e^{j\omega_0 n}$$

实指数 虚指数 $= a \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$

6. 正弦序列: $\sin(\omega_0 n)$ ω_0 : 数字频率.

7. 周期序列: $x(n) = x(n+N)$

$$\text{周期冲激序列: } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$



日期: /

① $\frac{2\pi}{w_0} \in \mathbb{Z} \rightarrow$ 周期是 $\frac{2\pi}{w_0}$

② $\frac{2\pi}{w_0} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Z} \rightarrow p$ 是周期

③ $\frac{2\pi}{w_0}$ 为无理数 $\rightarrow$ 无周期

序列的运算: 对应时刻

1. 加和乘 (对齐)

抽样特性: $x(n) \delta(n) = x(0) \delta(n)$

$$x(n) \delta(n-n_0) = x(n_0) \delta(n-n_0)$$

2. 移位、翻转、反变换

$$x_1(n) = \{ \underline{2}, 1, 1.5, -1, 1 \}$$

$$x_1(n+1) = \{ \underline{0}, 2, 1, 1.5, -1, 1 \} \text{ 延迟}$$

$$x_1(n-1) = \{ \underline{1}, 1.5, -1, 1, 0 \} \text{ 超前}$$

翻转: $x_1(n) = \{ \underline{2}, 1, 1.5, -1, 1 \}$

$$x_1(-n) = \{ \underline{1}, -1, 1.5, 1, 2 \}$$

反变换: $x_1(mn)$: 每 m 点抽取 n 个样值

$$x_1(n) = \{ \underline{2}, 1, 1.5, -1, 1 \}$$

$$x_1(2n) = \{ \underline{2}, 1.5, 1 \}$$

差分: $\rightarrow$ 前向差分: $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

$\rightarrow$ 后向: $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

日期: /

序列的卷积和 *

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$

$\uparrow$ 自变量 $\uparrow$ 求和项变量 $\uparrow$ n 是求和项变量

① 图解: 1卷2积, 3求和。

例: $x_1(n) = x_2(n) = R_4(n)$ 求 $y(n)$

Q 公式:

例: $x_1(n) = x_2(n) = u(n)$ 求 $y(n)$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m) u(n-m)$$
$$= \sum_{m=0}^n 1 = (n+1) u(n) \quad \boxed{\text{结论}}$$

例: $x_1(n) = a^n u(n)$ $x_2(n) = u(n)$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m u(m) u(n-m)$$
$$= \sum_{m=0}^n a^m = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$$
$$= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$$

运算律:

① 交换律: $x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$

② 结合律: $[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$

③ 分配律: $x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$

日期: /

$$y(n) = x(n) * \delta(n)$$

$\boxed{n=0}$

$$\text{解: } y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m) \delta(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(m)$$

$$= x(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(m)$$

$$= x(n)$$

$$\text{验证: } \textcircled{1} x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$\textcircled{2} x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$$

④ 对位相乘相加法:

$$x_1(n) = x_2(n) = R_4(n)$$

$$y(n) =$$

1	1	1	1							两序列右对齐
1	1	1	1							对位乘法
1	1	1	1							
1	1	1	1							
1	1	1	1							
1	1	1	1							
1	2	3	4	3	2	1				对位相加

日期: /

时域运算系统

$$x(n) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = T[x(n)]$$

分类:

① 线性与非线性 ② 时变/时不变 ③ 因果/非因果 ④ 稳定/不稳定
线性系统 满足叠加原理 ① 可加性 ② 齐次性

证明: $y(n) = x(n) + b$ 是非线性系统.

$$a_1 y_1(n) = T[a_1 x_1(n)] = a_1 x_1(n) + b$$

$$a_2 y_2(n) = T[a_2 x_2(n)] = a_2 x_2(n) + b$$

$$a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + 2b$$

$$T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + b$$

不相等 $\rightarrow$ 非线性

证明: $y(n) = h x(n)$ 是线性系统

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = h x_1(n)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = h x_2(n)$$

$$y_1(n) + y_2(n) = h x_1(n) + h x_2(n)$$

相等

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = h[x_1(n) + x_2(n)]$$

日期: /

时不变系统

① 定义: 系统对于输入信号的运算关系在任意运算过程中不随时可变而变。则系统为时不变。

$$\text{若 } y(n) = T[x(n)] \quad \text{则 } y(n-n_0) = T[x(n-n_0)]$$

② 步骤 1). 先计算 $(n-n_0)$ 下 $y(n-n_0)$

2). 再计算 $T[x(n-n_0)]$

3). 对比结果。

例: 证明: $y(n) = nx(n)$ 是时变系统

$$y(n-n_0) = (n-n_0)x(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)] = nx(n-n_0) \quad \neq \text{不等}$$

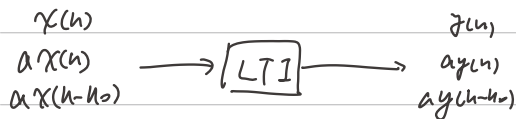
总结:

线性系统: ① 输入输出 齐次性 ② 可加性

时不变系统: ① 输入输出变量的尺度不变 ② 输入 $x(n)$ 的幅度是常数

日期: /

线性时不变系统 (LTI)



输出响应分类:

① 零状态响应 $y_{zs}(n)$, 反由输入序列在观察之后产生的响应

② 零输入响应 $y_{zi}(n)$: 初始状态决定的响应

全响应: $y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$

单位脉冲响应:

定义: 输入为 $\delta(n)$, 系统的零状态响应为 $h(n)$

对于 $y(n) = T[x(n)]$ 则 $h(n) = T[\delta(n)]$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

注: ① LTI系统 ② $y(n)$ 为 y_{zs}

单位阶跃响应:

$$x(n) = u(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad \text{即} \quad g(n) = u(n) * h(n)$$

日期: /

因果性: 系统的输出不发生在输入之前

$$y(n) = a \underline{x(n+1)} + b \quad \times$$

超前

LTI 是因果系统的重要条件: 当 $n < 0$ 时 $h(n) = 0$

稳定性: 有界输入得到有界输出 BIBO

LTI 是稳定的重要条件: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ (绝对可和)

其他系统判断用上述

离散 LTI 的数学模型:

1. 时域离散系统的基本单元 — D 延时 $y(n) \xrightarrow{\text{D}} y(n+1)$

2. 一阶时域离散系统的结构

$$y(n) = x(n) - ay(n-1)$$



$$y(n) + ay(n-1) = x(n) \quad \text{— 一阶常系数差分方程}$$

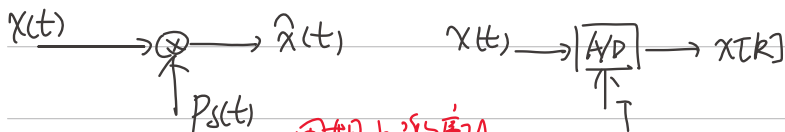
解差分方程:

- ① 经典法
- ② 递推法
- ③ Z变换

日期: /

模拟信号 $\rightarrow$ 信号编码 $\rightarrow$ 数字信号

采样 $\rightarrow$ 量化 $\rightarrow$ 编码

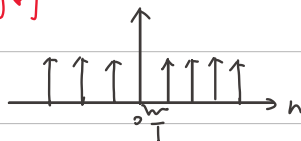


$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p_s(t)$$

$$= x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$$

周期冲激序列



$$\underline{x_a(t)} \xrightarrow{t=nT} \underline{x_a(nT)}$$

假设 $x_a(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta) \xrightarrow{t=nT} x_a(t) = \cos[2\pi f_c nT + \theta]$

采样时间间隔

采样 采样

采样后的序列 $x(n) = \cos[2\pi f_c \textcircled{T_0} n + \theta]$

$$= \cos[(2\pi \frac{f_m}{f_s}) n + \theta]$$

若 $\frac{f_m}{f_s} = \frac{1}{2}$ $x(n) = \cos(n\pi + \theta)$ $N=2$

采样定理 (奈奎斯特定理): 采样频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$ 防止混叠现象。

日期: /

序列的傅立叶变换:

1. 斜率超的数学表示.

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT)$$

Fourier:

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) \right] e^{-j\omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t-nT) \right] e^{-j\omega \cdot nT} dt \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\omega nT} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) dt \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\omega nT}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} x_a(nT) = X(n) \quad \Delta T = \omega$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{-j\omega n} \quad \text{序列的 FT}$$

收敛条件:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |X(n)| < \infty$$

收敛性

$$\text{反变换: } X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

中 $\delta(n)$ 的 FT:

$$\begin{aligned}X(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

日期: /

2) $a^n u(n)$, $a \in (0,1)$ 的 FT

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n) \cdot e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

性质:

1. 周期性.

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega + 2\pi M)n} \\ &= X(e^{j(\omega + 2\pi M)}) \end{aligned}$$

2. 线性

3. 时移与频移

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

$$\text{时移: } FT[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$\text{频移: } FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X[e^{j(\omega - \omega_0)}]$$

时间频反

日期: /

4. 帕斯维尔定理 (能量定理)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

时域总能量 = 频域总能量 (能量守恒)

序列 FT 的对称性:

例: 求 $x(-n)$, $x^*(n)$, $x^*(-n)$ 的 FT.

$$\text{FT}[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n} = \underline{X(e^{-j\omega})}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\begin{aligned} \text{FT}[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{-j\omega n} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n} \right)^* \\ &= \underline{X^*(e^{-j\omega})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FT}[x^*(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n) e^{-j\omega n} \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{j\omega n} \right]^* \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right]^* \\ &= \underline{X^*(e^{j\omega})} \end{aligned}$$

总结: $\text{FT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) \xleftrightarrow[\text{反傅氏}]{(-n) \leftrightarrow (-j\omega)} \text{FT}[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$

$\text{FT}[x^*(n)] = X^*(e^{j\omega}) \xleftrightarrow[\text{反傅氏}]{(-n) \leftrightarrow (j\omega)} \text{FT}[x^*(-n)] = X^*(e^{-j\omega})$

日期: /

定义: $x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$ 序列共轭对称部分

$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$... 反对称...

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$FT[x_e(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$FT[x_o(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$$

总结:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j \text{Im}[x(n)]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

辐角

实部偶对称, 虚部奇对称

幅度对称, 辐角奇对称

日期: /

z变换的定义.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

时域
z域

z是复变量 $z = re^{j\omega}$

典型序列的z变换:

$$\delta(n) \leftrightarrow 1 \quad u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{或} \quad \frac{z}{z-1} \quad \text{条件: } |z| < 1$$

$$\textcircled{-} u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad |z| < 1$$

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > a$$

$$R_N u(n) \leftrightarrow \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad |z| < \infty$$

$$n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(1-z)^2} \quad |z| > 1 \quad (\text{时域})$$

z变换的收敛域:

序列的分类:

(1) 双边序列 $-\infty < n < \infty$

(2) 右序列 $n \geq n_1$

(3) 有限长序列 $n_1 \leq n \leq n_2$

(3) 左序列 $n \leq n_1$

($n_1 < n_2$)

(4) 右序列 (因果序列), $n \geq 0$ 序列

(5) 左序列 (非因果) $n < 0$

日期:

/

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}; |z| > 1$$

$$\text{令 } 1-z^{-1}=0 \quad \boxed{\text{解得 } z=1} \rightarrow \text{极点 } z_p$$

对于右序列: 收敛域为 $|z| > |z_p|$

左

$$|z| < |z_p|$$

双边序列的收敛域:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$
$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}}_{\text{左序列}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}}_{\text{右序列}}$$

$$= X_1(z) + X_2(z)$$

极点 R_{x+}

R_{x-}

$$|z| < R_{x+}$$

$$|z| > R_{x-}$$

$$\text{若 } R_{x+} > R_{x-} \quad \text{则} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\text{若 } R_{x+} < R_{x-} \quad \text{无解}$$

$$\text{特例: } 0 < |z| < \infty$$

日期: /

z变换求差分方程:

1. 输入输出的z变换公式

$$y(n-2) + ay(n-1) + by(n) = cx(n) + dx(n-1)$$

输出 输入

$$y(n) \leftrightarrow Y(z)$$

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

1) $y(n-1] \leftrightarrow z^{-1}Y(z) + y(-1)$

$$y(n-2) \leftrightarrow z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)$$

2) $x(n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z), x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}X(z)$

例: $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$

已知输入 $x(n] = (0.7)^n u(n)$ $y(-1) = 1.5$ 求 $y(n)$.

$$Y(z) - 0.5[z^{-1}Y(z) - y(-1)] = X(z)$$

$$(1 - 0.5z^{-1})Y(z) = \frac{z}{z-0.7} + 0.75$$

$$Y(z) = \frac{z(1.75z - 0.525)}{(z-0.5)(z-0.7)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1.75z - 0.525}{(z-0.5)(z-0.7)} = \frac{\frac{7}{4}}{z-0.5} + \frac{\frac{7}{2}}{z-0.7}$$

$$Y(z) = -\frac{7}{4} \frac{z}{z-0.5} + \frac{7}{2} \frac{z}{z-0.7}$$

$$y(n] = [-\frac{7}{4}(0.7)^n + \frac{7}{2}(0.5)^n]u(n)$$

日期: /

z变换性质:

1. 线性:

$$\text{if } x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \quad x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$$

$$a x_1(n) + b x_2(n) \leftrightarrow a X_1(z) + b X_2(z) \quad (\text{注意收敛域})$$

2. 序列移位:

$$1) \text{ 若 } x(n) \text{ 为双边序列: } x(n) \leftrightarrow X(z)$$

$$\text{则 } x(n \pm n_0) \leftrightarrow z^{\pm n_0} X(z)$$

$$2) \text{ 若 } x(n] \text{ 为左序列右移: } x(n-1) \leftrightarrow z^{-1} X(z) + x(-1)$$

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2} X(z) + z^{-1} x(-1) + x(-2)$$

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-(m+k)}$$

$$3) \text{ 若 } x(n] \text{ 为右序列左移: } x(n+1) \leftrightarrow z X(z) - x(1)$$

$$x(n+2) \leftrightarrow z^2 X(z) - z x(1) - x(2)$$

$$x(n+m) \leftrightarrow z^m X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{m-k}$$

3) 序列乘以实常数 a^n

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \text{则 } y(n) = a^n x(n) \quad Y(z) = X(a^{-1} z)$$

4) 序列乘以 n

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \text{则 } n x(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

日期:

/

5. 复共轭序列的Z变换:

$$\text{if } x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \text{then } x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*)$$

6. 初值定理:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

7. 终值定理

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z)$$

8. 时域卷积定理

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

9. 帕斯瓦尔定理 (能量定理)

日期: /

Z反变换

方法: (1) 观察法
2) 留数法
3) 部分分式展开法

利用性要求:

若 $y(n) = (1/6)^n u(n)$ 且 $X(z)$ 存在则满足:

$$1) Y(z^2) = \frac{1}{2} [X(z) + X(-z)]$$

2) Z平面内, $X(z)$ 有且仅有一极点与零:

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1/6} \quad Y(z') = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{6})(z + \frac{1}{6})} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{z}{z - \frac{1}{6}}}_{X(z)} + \underbrace{\frac{z}{z + \frac{1}{6}}}_{X(-z)} \right)$$

$X(-z) \quad X(z)$

故本题及要求的序列有2]

日期: /

利用留数法求 z 反变换

z 反变换公式: $x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} dz$ 围线积分

① 例题 5.11:

$$X(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_k)}$$

$$x(n) = \left[\sum_k \operatorname{Res} [X(z) z^{n-1}] \right]_{z=p_k}$$

step: ① 求极点 ② 求留数

例: 已知 $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ ($|z| > 2$)

解: 1) 先求 $X(z) \cdot z^{n-1}$ 的极点:

$$X(z) z^{n-1} = \frac{z^n}{(z-1)(z-2)} \quad z_1=1 \quad z_2=2$$

$|z| > 2$ 即 $n \geq 0$ $z_1=1$ 为极点. $\left. \frac{(z-1) \cdot z^n}{(z-1)(z-2)} \right|_{z=1} = -1$

$z_2=2$ 为极点. $\left. \frac{(z-2) z^n}{(z-1)(z-2)} \right|_{z=2} = 2^n$

$\therefore$ 两极点均含 $n \geq 0$ 极点 $\therefore x(n) = (-1 + 2^n) u(n)$

日期: /

系统函数 $H(z)$ 与分布马氏为因果稳定性。

1. 系统函数 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 令 $X(z) = 0$ 的解为极点

2. 因果性。

LTI 是因果的充要条件: 当 $n < 0$ 时 $h(n) = 0$ 即只有右逆 Z 变换

稳定性: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

由 $a^n u(n)$ 为例。

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n u(n)| < \infty \Rightarrow |a| < 1$

又: Z 变换及其收敛域:

$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > a \quad a \text{ 是极点。}$

例: $H(z)$ 收敛域包含单位圆, 则系统稳定。

例: 已知: $H(z) = \frac{1-a^{-1}}{(1-az^{-1})(1-az)}$ $0 < a < 1$

令 $(1-az^{-1})(1-az) = 0$

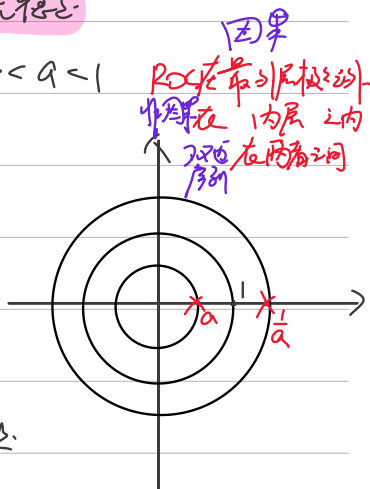
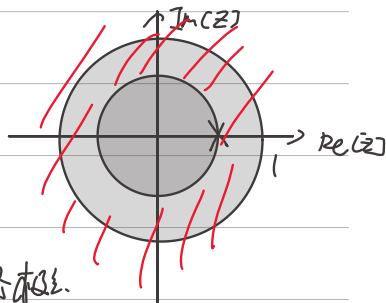
$\therefore z_1 = \frac{1}{a} \quad z_2 = a$

1) 收敛域为 $|z| > \frac{1}{a}$ 因果, 不稳定。

2) 收敛域为 $|z| > a$ 非因果, 稳定。

3) 收敛域为 $a < |z| < \frac{1}{a}$ 非因果, 稳定。

4) 收敛域为 $|z| < a$ 非因果, 不稳定。



日期: /

利用已变换分析系统的频响特性

1. 离散傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$

是 $h(n)$ 的 FT.

2. 系统函数 $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

是单位脉冲响应 $h(n)$ 的 Z 变换

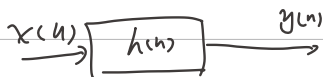
$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) \quad \text{性质: 在单位圆上的 Z 变换}$$

$$3. h(n) \rightarrow H(z) \rightarrow H(e^{j\omega})$$

$|H(e^{j\omega})|$ 是 $H(e^{j\omega})$ 的模, 称为幅频特性函数.

$\varphi(\omega)$ 是 $H(e^{j\omega})$ 的辐角, 称为相频特性函数

例: 已知系统输入信号为 $x(n) = e^{j\omega n}$, 求输出信号 $y(n)$



$$y(n) = h(n) * x(n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) x(n-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)}$$

$$= e^{j\omega n} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) e^{-j\omega m}$$

$$= \frac{e^{j\omega n}}{\text{时域}} \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{频域}}$$

$$y(n) = e^{j\omega n} |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$= |H(e^{j\omega})| e^{j[\omega n + \varphi(\omega)]}$$

日期: /

$e^{j\omega n}$ 序列的实现: 频率为 ω 单频信号

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

输入 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 频率为 ω_0

系统只需要对这个 ω_0 产生响应. 即.

$$H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j\varphi(\omega_0)}$$

当 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ 时.

$$y(n) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j[\omega_0 n + \varphi(\omega_0)]}$$

相位修正

幅度增益

当 $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \theta)$ 时.

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \theta + \varphi(\omega_0)]$$

当 $x(n) = A \sin(\omega_0 n + \theta)$ 时:

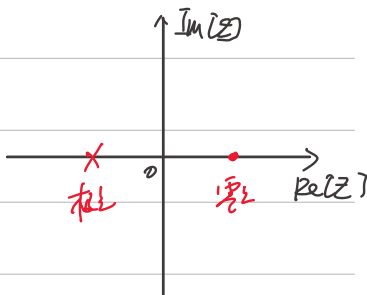
$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \sin[\omega_0 n + \theta + \varphi(\omega_0)]$$

频率特性确定

零极点图.

1. 系统函数 $H(z)$ 与零极点图.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(z - z_1) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1) \cdots (z - p_k)}$$



日期:

/

$$H(z) = \frac{(1 - b_1 z^{-1})(1 - b_2 z^{-1}) \dots}{(1 - a_1 z^{-1})(1 - a_2 z^{-1}) \dots}$$

$|1 - b_1 z^{-1}|$ 表示 1 到点 b_1 的距离.

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\text{所有零点到单位圆上点的长度之积}}{\text{所有极点到单位圆上点的长度之积}}$$

$$\angle \varphi(\omega) = \frac{\text{所有零点到单位圆上点的辐角之和}}{\text{所有极点到单位圆上点的辐角之和}}$$

1) 极点与频率响应的幅度和相位峰值和尖锐性

极点越靠近单位圆, 峰值越高越尖锐

极点在单位圆上不稳定

2) 零点主要影响响应的谷点位置 and 形状

零点位于单位圆上时, 谷点为零

原点

不产生影响

日期: /

离散傅里叶变换(DFT)

$$\text{定义: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

离散傅里叶反变换(IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

DFT公式解释1:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

频谱自变量

时域序列的自变量

N : 变换区间的长度
(N 点DFT)

周期单位复指数序列: (旋转因子)

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

例. 取 $x(n) = \delta(n)$ 求 DFT.

$$N=4 \quad \text{代入公式: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^3 \delta(n) W_4^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^3 \delta(n) e^{-j\frac{\pi}{2}nk}$$

$$= \delta(0)e^0 + \delta(1)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(2)e^{-j\pi} + \delta(3)e^{-j\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 1$$

日期: /

$$R_4(n) = \{1, 1, 1, 1\}$$

例2. $X(n) = R_4(n)$. 求 $X(n)$ 的 4 点 DFT 和 8 点 DFT. $\begin{cases} N=4 \\ N=8 \end{cases}$

$$\text{解: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^3 R_4(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= R_4(0)e^0 + R_4(1)e^{-j\frac{\pi}{2}k} + R_4(2)e^{-j\pi k} + R_4(3)e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$$

$$= 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$$

$$X(0) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$X(1) = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi} + e^{-j\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 1 - j - 1 + j = 0$$

$$X(2) = 0, \quad X(3) = 0$$

$\therefore R_4(n)$ 的 4 点 DFT 为 $X(k) = [4, 0, 0, 0]$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{nk}$$

$$R_4 = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

$$= \sum_{n=0}^7 X(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= X(0)e^0 + X(1)e^{-j\frac{\pi}{4}k} + X(2)e^{-j\frac{\pi}{2}k} + X(3)e^{-j\frac{3\pi}{4}k}$$

$$= \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{8}k} (e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k})}{e^{-j\frac{\pi}{8}k} (e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k})} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{8}k} \sinh(\frac{\pi}{8}k)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k} \sinh(\frac{\pi}{8}k)}$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{8}k} \frac{\sinh(\frac{\pi}{8}k)}{\sinh(\frac{\pi}{8}k)}$$

日期: /

周期延拓.

1. 周期与非周期的表示.

时域: DFT域:

$$x(n) \quad X(k)$$

$$\tilde{x}(n) \quad \tilde{X}(k)$$

$$X(k)_N \quad X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

$\downarrow$
周期

$x(n)$ 的隐含周期

由 $x(n)$ 的周期性 $\tilde{x}(n) = x(n)_N$

周期延拓的关键参数: 序列长度 M , 周期延拓后的周期 N

1) 序列长度 $M =$ 延拓周期 N

3) 序列长度 $M >$ 延拓周期 N

$$x(n) = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

$$\tilde{x}(n) = x(n)_4$$

$$\tilde{x}(n) = x(n)_6$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5-6 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 6 & 8 & 3 & 4 \end{array} \quad \text{延拓}$$

2) 序列长度 $M <$ 延拓周期 N

$$x_8(n) = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 0] \quad \text{序列后补0.}$$

先将序列以周期 N 进行延拓.
补零形成新序列, 再做周期
延拓

$$\tilde{x}(n) = x(n)_8$$

日期: /

$$\text{已知 } x(n) = [1, 1, 3, 4]$$

$$\text{求 } x((-n))_5,$$

$$\text{先按周期进行延拓: } x(n)_5 = [1, 1, 3, 4, 0, 1, 1, 3, 4, \dots]$$

$$\text{再做序列的反射: } x((-n))_5 = [0, 4, 3, 1, \underline{1}, 0, 4, 1, 1, \dots]$$

$$x((-n))_5 R_5(n) = [1, 0, 4, 3, 1]$$

$(l)_N$: 模 N 对 n 求余

$$x((8))_5 = x(0)$$

$$x((9))_5 = x(1)$$

$X(k)$ 的隐含周期

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$\tilde{X}(k)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的频谱. DFT 的定义

$\tilde{X}(k)$ 的本质是离散傅里叶级数

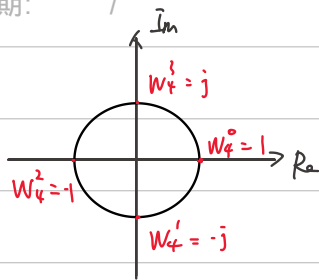
周期序列的傅里叶级数. DFS: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$

离散傅里叶变换 DFT: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$

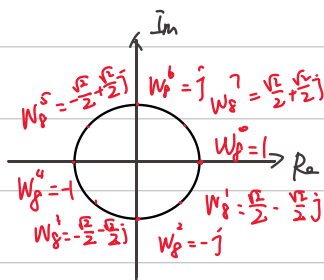
旋转因子: 周期单位复指数序列

$$W_N^B = e^{-j \frac{2\pi}{N} B}$$

日期: /



$N = 4$



$N = 8$

DFT 小定理的概述:

1. 线性:

若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两有限长序列, 长度分别为 N_1 和 N_2 , 且

$$y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

取变换区间长 $N = [N_1, N_2]_{\max}$.

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]_N; X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]_N$$

则 $y(n)$ 的 N 点 DFT 为:

$$Y(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$$

2. 循环移位特性:

1) 正向的循环移位:

设 $x(n)$ 为有限长序列, 长度为 N , 则 $x(n)$ 的循环移位定义为:

$$y(n) = x((n+m))_N \text{ Rr}(n)$$

$$\underline{\tilde{x}(n)} = x((n))_N \rightarrow x((n+m))_N \text{ 取主值部分 } y(n)$$

日期: /

已知 $x(n) = [2, 5, 8, 8, 5, 2]$; $M=6$, $N=8$ 求:

1) $x(n)_8 = [2, 5, 8, 8, 5, 2, 0, 0, 2, 5, 8, 8, 5, 2, \dots]$

2) $x((n+2))_8$

$$x(n) = [2, 5, 8, 8, 5, 2]$$

$$x(n+2) = [2, 5, 8, 8, 5, 2]$$

$$x(n+2)_8 = [2, 5, 8, 8, 5, 2, 0, 0, 2, 5, 8, 8, 5, 2, \dots]$$

3) $x((n+2))_8 R_8(n) = [8, 8, 5, 2, 0, 2, 5]$

时域循环移位定理

已知 $x(n)$ 为有限长序列, 长度为 N , 则 $y(n)$ 为 $x(n)$ 的循环移位, 即:

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

$$Y(k) = W_N^{-mk} X(k)$$

频域循环移位定理

如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$

$$Y(k) = X((k+Q))_N R_N(k)$$

则 $y(n) = W_N^{nQ} x(n)$

日期: /

3. 循环卷积处理

1) 如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个有限长序列, 长度分别为 M_1 和 M_2 , 且取循环卷积区间长度 $L \geq \max[M_1, M_2]$:

$X_1(k)$ 是 $x_1(n)$ 的 L 点 DFT

$X_2(k)$ 是 $x_2(n)$ 的 L 点 DFT

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) \longleftrightarrow Y(k) = X_1(k) X_2(k)$$

2) L 点循环卷积的定义

循环卷积的符号: $\textcircled{L}$ 循环卷积又叫 圆周卷积, 圆卷积

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} [x_1(m) \underbrace{x_2((n-m))_L}_{\text{循环-延拓}}] R_L(n)$$

或卷积(卷积和)

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{bmatrix}$$

$$y(n) = x_1(n) \textcircled{L} x_2(n)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{循环卷积矩阵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ \vdots \\ x_1(L-1) \end{bmatrix}$$

$$x_2((n-m))_L \quad x_1(m)$$

日期: /

改序2) $X_1(n) = \{1, 1, 1, 1\}$, $X_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$

本序2) $X_1(n) \textcircled{4} X_2(n)$ 和 $X_1(n) \textcircled{8} X_2(n)$

$$X_1(n) \textcircled{4} X_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} X_1(m) X_2(n-m)_4 \right] R_4(n)$$

$$X_1(n) \textcircled{4} X_2(n) = \left[\sum_{m=0}^3 X_1(m) X_2(n-m)_4 \right] R_4(n)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$X_2(n-m)_4$ $X_1(m)$

$X_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$

按列解方程组-12

$X_2(-n) = \{4, 3, 2, 1\}$

$n=0$ $X_2((-n)_4) = \{4, 3, 2, \boxed{1}, 4, 3, 2, 1, \dots\}$

$n=1$ $X_2((-1-n)_4) = \{2, 1, 4, 3\}$

$n=2$ $X_2((-2-n)_4) = \{3, 2, 1, 4\}$

$n=3$ $X_2((-3-n)_4) = \{4, 3, 2, 1\}$

$$X_1(n) \textcircled{8} X_2(n) = \left[\sum_{k=0}^7 X_1(k) X_2(n-k)_8 \right] R_8(n)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

日期: /

实用解法: 先对应相乘相加求出全部积, 再按循环卷积长处理:

$$x_1(n) = \{1, 2, 3, 4\}, \quad x_2(n) = \{1, 1, 1, 1\}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 10 & 9 & 7 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$x_1(n) * x_2(n) = \{1, 3, 6, 10, 9, 7, 4\}$$

4点循环卷积

左位保留序列 截余序列

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 9 \ 7 \ 4 \\ 9 \ 7 \ 4 \quad \quad \quad \\ \hline 10 \ 10 \ 10 \ 10 \end{array}$$

循环卷积区间比卷积长或
等于长时, 截余序列补齐
做加法

8点循环卷积

N位保留序列

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 9 \ 7 \ 4 \quad \quad \quad \\ \hline 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 9 \ 7 \ 4 \ 0 \ 0 \end{array}$$

循环卷积区间比卷积长或等于
时, 截余序列补齐。

为主位序列的序列循环卷积后处理) 取主位序列。

$$x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}, \quad x_3(n) = \{1, 1, 1, 1\} \quad \text{求 4点}$$

对截位序列做4点循环卷积并取主位序列

$$x_{21}(n) = x_2(n) \oplus R_4(n) = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$x_{31}(n) = x_3(n) \oplus R_4(n) = \{1, 1, 1, 1\}$$

4点序列

$$x_{21}(n) * x_{31}(n) = \{2, 5, 9, 10, 5, 11\}$$

$$x_1(n) \oplus x_2(n) = \{10, 10, 10, 10\}$$

日期: /

已知: $X(k)$ 的 4 点 DFT 为 $\{4, 0, 0, 0\}$. 求 $X(n)$

$$\text{解: } X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$X(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) W_4^{-nk}$$

$$X(n) = \frac{1}{4} [X(0) W_4^{-0n} + X(1) W_4^{-1n} + X(2) W_4^{-2n} + X(3) W_4^{-3n}]$$

$$= 1$$

$$X(0)=1 \quad X(1)=1 \quad X(2)=1 \quad X(3)=1$$

$$X(n) = \{1, 1, 1, 1\}$$

复共轭的 DFT

设 $X^*(n)$ 是 $X(n)$ 的复共轭序列. 长度为 N ,

$$\text{DFT}[X(n)]_N = X(k) \quad \text{则}$$

$$\text{DFT}[X^*(n)]_N = X^*(N-k); \quad 0 \leq k \leq N-1;$$

$$\text{例 } X(N) = X(0)$$

已知 $X(n)$ 的 4 点 DFT 为 $\{1, \frac{1}{2} + j, -2, 1 - j\}$;

$$X^*(n) \quad \{1, 1 - j, -2, \frac{1}{2} - j\}$$

$$X(0) = X^*(4-0) = X^*(4) = 1$$

$$X^*(4) = X^*(0) = 1$$

$$X(1) = X^*(4-1) = X^*(3) = 1 - j$$

$$X(2) = X^*(4-2) = X^*(2) = -2$$

$$X(3) = X^*(4-3) = X^*(1) = \frac{1}{2} - j$$

日期: /

DTF 的共轭对称性:

设 $x(n)$ 是长度为 N 的序列. 且 $X(k) = \text{DTFT}[x(n)]$,

则 $X(k)$ 满足以下对称性:

1) $X(k)$ 共轭对称 即 $X(k) = X^*(N-k)$

2) 若 $x(n)$ 为偶对称 即 $x(n) = x(N-n)$, 则 $X(k) = X(N-k)$

3) 若 $x(n)$ 为奇对称 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k) = -X(N-k)$

例: 已知 $N=8$ 点的实序列的 DFT 的偶数点值为: 求 DFT 奇数点的值.

$$X(0) = 4.8; X(2) = 3.1 + j0.5; X(4) = 0.4 + j4.2$$

$$X(6) = 5.2 + j3.3$$

由共轭对称:

$$X(k) = X^*(N-k) \quad X(2) = X^*(7-k)$$

$$X(1) = X^*(6) = 3.2 - j3.3 \quad X(3) = X^*(5) = 0.4 - j4.2$$

$$X(5) = X^*(3) = 3.1 - j0.5 \quad X(7) = X^*(1) = 4.8$$

频域采样定理.

如果 $x(n)$ 长度为 M , 则只有当频域采样点数 $N \geq M$ 时, 才

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x(n)$$

频域即可由频域采样 $X(k)$ 恢复原序列 $x(n)$

日期:

/

理解 DFT:

连续周期信号 (周期 T)

Fourier 级数 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$C_n = \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

连续非周期信号:

$T \rightarrow \infty$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \omega: \text{连续值}, \frac{\omega}{T} \approx 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

离散非周期:

$$t \rightarrow n\sigma t \quad \sigma t = \frac{1}{f_s}$$

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\sigma t) e^{-j\omega n\sigma t}$$

note. $\sigma t \rightarrow 1/s, F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{-j\omega n} \quad \omega = n\omega_s/s$

日期: /

(FS) : Fourier Series . 连续时间. 周期信号.

连续时间周期信号 $\leftrightarrow$ 频域的谱 (谐波)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\text{谐波}} e^{jk\omega_0 t}$$

(a_k)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

(FT) Fourier Transform 连续. 非周期 $\leftrightarrow$ 连续谱
在 FS 中 $\boxed{T \rightarrow \infty}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ $\underbrace{a_k}_{\rightarrow X(j\omega)}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(DTFT) Discrete-Time Fourier Transform
离散时间. 非周期

在 FT 中. 时间被采样 $t \rightarrow nT$ $X[n] = X(nT)$ $\rightarrow$ 离散谱也具有周期性

积分 $\rightarrow$ 求和.

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{-j\omega nT}$$

$$X[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega nT} d\omega$$

日期: /

(DFS) Discrete Fourier Series

离散时间. 周期信号. 频域离散

$x[n]$ 是 $1 \leq N$ 为周期序列. $x[n+N] = x[n]$

(FS)
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot kn}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot kn}$$

(DFT) Discrete Fourier Transform

离散时间. 有限长序列

(DFS) $\leftarrow N$ $1 \leq N$ 为周期序列 $\rightarrow$ 周期.

其 (FS) $\rightarrow$ (DFT) 频域. 时域. 均离散
离散采样

日期: /

DFS 的 22 的 112 的 121:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N & k = m \cdot N \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^9 W_{10}^{kn} = 10 \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(n + 10r)$$

圆周共轭偶部: $X_{ep}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*((N-n)_N)]$

{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}

求 $x^*((8-n)_8)$

$x^*((8-n)_8) = \{8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}

$X_{ep} = \{8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}$

共轭对称部: $X(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$

求 $R_k(n)$ 共轭对称

$R_k(n) = \{1, 1, 1, 1\}$

$n=0 \quad x(0) = \frac{1}{2} (1+1) = 1$

$n=1 \quad x(1) = \frac{1}{2} \quad n=2 \quad x(2) = \frac{1}{2} \quad n=3 \quad x(3) = \frac{1}{2}$

$n=-1 \quad x(-1) = \frac{1}{2} \quad n=-2 \quad x(-2) = \frac{1}{2} \quad n=-3 \quad x(-3) = \frac{1}{2}$

$\therefore R_p = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

日期: /

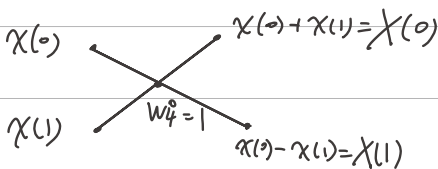
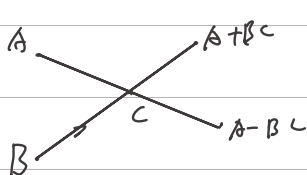
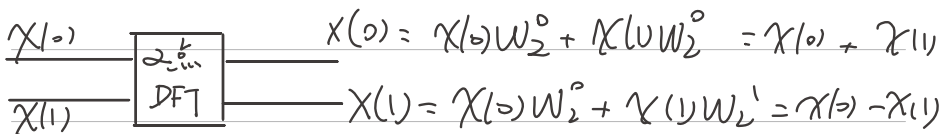
快速傅里叶变换 FFT

离散傅里叶变换 DFT 的计算量:

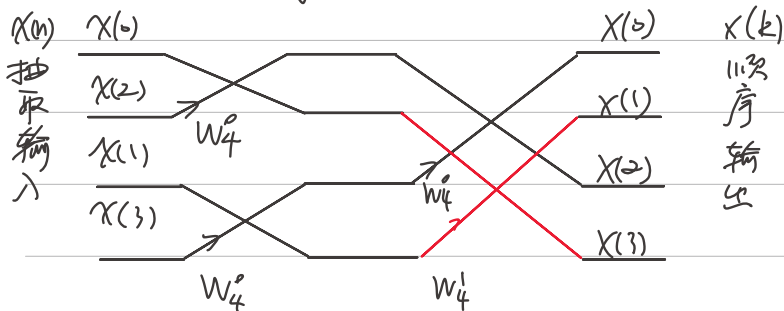
加法: $N(N-1)$ 次

乘法: N^2 次

基2 FFT 的基本原理

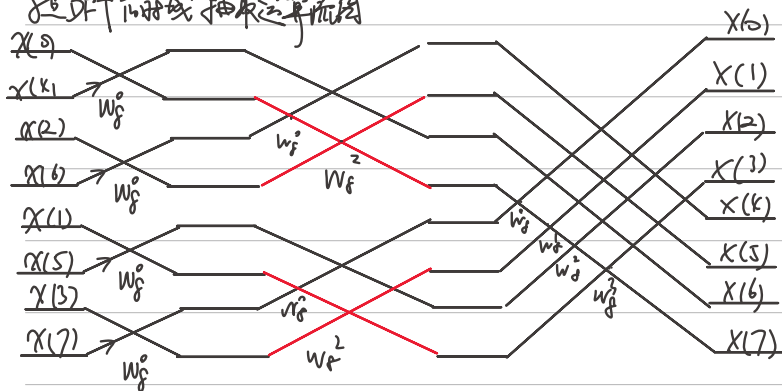


4点 DFT 的时域抽取运算流程图



日期: /

8点DFT时域抽取运算流程图



N点FFT倒序算法输入序号.

1. 序号加1 $M = 1024$

2. 序号加1从0依次加1. 输出 - 序号.

128点FFT为例: $\log_2 8 = 3$

5468	$X(0)$	0	0	0	$X(0)$	
高128加1		1			$X(4)$	向次高128位.
		1	0	0		输入并值并输出
		0	1	0	$X(2)$	$X(0)$
		1	1	0	$X(6)$	$X(4)$
		0	0	1		$X(2)$
		1	0	1	$X(1)$	$X(6)$
		1	0	1	$X(5)$	$X(1)$
		0	1	1	$X(3)$	$X(5)$
		1	1	1	$X(7)$	$X(3)$

日期:

/

N 点基2 FFT 运算所需次数为 $M = \log_2 N$.

则第 L 级的旋转因子为 $W_N^{J \cdot 2^{M-L}}$ $J = (0, 1, 2, \dots, (2^{L-1} - 1))$

第1级: $L=1, 2^{L-1}-1=0, J=0, W_8^0$

第2级: $L=2, 2^{L-1}-1=1, J=0, 1$

$$W_8^{0 \cdot 2^{3-2}} = W_8^0 \quad W_8^{1 \cdot 2^{3-2}} = W_8^2$$

第3级: $L=3, 2^{L-1}-1=3, J=0, 1, 2, 3$

$$W_8^{0 \cdot 2^{3-3}} = W_8^0 \quad W_8^{1 \cdot 2^{3-3}} = W_8^1$$

$$W_8^{2 \cdot 2^{3-3}} = W_8^2 \quad W_8^{3 \cdot 2^{3-3}} = W_8^3$$

FFT 快速算法次数:

乘法: $\frac{N}{2} \log_2 N$ 加法: $N \log_2 N$

日期:

/

利用N点FFT性质, 计算N点 IFFT.

$$\text{DFT: } X[m] = \text{DFT}[x[k]] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{mk}$$

$$x[k] = \text{IDFT}[X[m]] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j\frac{2\pi}{N}mk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mk}$$

$$x[k] = \text{IDFT}[X[m]] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mk}$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} X^*[m] W_N^{mk} \right)^*$$

$$= \frac{1}{N} \left(\text{DFT}[X^*[m]] \right)^*$$

证: $x[m] \rightarrow \text{取共轭} \rightarrow \text{FFT} \xrightarrow{N \times \frac{1}{N}} \text{去共轭} \rightarrow \frac{1}{N} \rightarrow x[k]$

证:

日期: /

同时以对称法将序列分为以 $\frac{N}{2}$ 点 FFT 实现 N 点 DFT.

已知序列 $x(n)$ 是长为 N (偶数). 将序列对称分为两半长为 $\frac{N}{2}$ 的序列 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$, 它们以 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 记为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 试推导 $x(k)$ 和 $X(k)$ 的 NEDFT 关系.

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{nk} \quad \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{(n + \frac{N}{2})k}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X_1(k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + W_N^{\frac{N}{2}k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{nk} \quad W_N^{\frac{N}{2}k} = (-1)^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + (-1)^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{nk}$$

$$X(k) \text{ 的偶数项 } X(2m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2nm} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{2nm} \\ = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_{N/2}^{nm}}_{X_1(m)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_{N/2}^{nm}}_{X_2(m)}$$

$$X(k) \text{ 的奇数项 } X(2m+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{n(2m+1)} - \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{n(2m+1)} \quad W_N^{2nm} \cdot W_N^n \\ = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [W_N^n x(n)] W_{N/2}^{nm} - \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [W_N^n x(n + \frac{N}{2})] W_{N/2}^{nm} \\ = X_1((m+1))_m R_{N/2}(m) - X_2((m+1))_m R_{N/2}(m)$$

日期: /

给定序列的长度为8, 其抽取因子 $X(k) = \{0.7, 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5\}$.

另一个序列 $y(n) = X(n) \otimes R_{16}(n)$, 则 $y(n)$ 的16点DFT为 $Y(k)$?

$$y(n) = X(n) \otimes R_{16}(n) = \{X(n), X(n)\}.$$

$$Y(2m) = X_1(m) + X_2(m) = 2X(m)$$

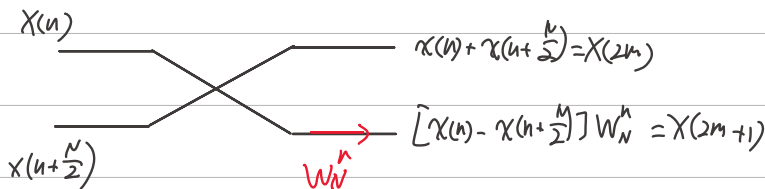
$$Y(2m+1) = X_1((m+1)) - X_2((m+1)) = 0$$

$$Y(k) = \{1.4, 0, 1, 0, 0.6, 0, 0.4, 0, 0.2, 0, 0.4, 0, 0.6, 0, 1, 0\}$$

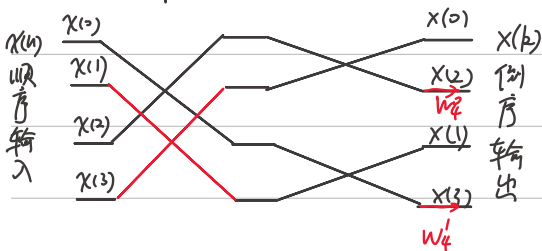
根据抽取因子基2-FFT算法思路:

$$x(k) \text{ 的偶数项: } X(2m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [X(n) + X(n + \frac{N}{2})] W_N^{nm}$$

$$x(k) \text{ 的奇数项: } X(2m+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [X(n) - X(n + \frac{N}{2})] W_N^n W_N^{nm}$$



4点基2FFT算法流程图.



日期: /

DI1-FFT

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$\begin{aligned} & \swarrow \quad \searrow \\ & \text{偶} \quad \text{奇} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x(n) &= x(2m) \\ x(n) &= x(2m+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_N^{(2m+1)k} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_{\frac{N}{2}}^{mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_{\frac{N}{2}}^{mk} W_N^k \end{aligned}$$

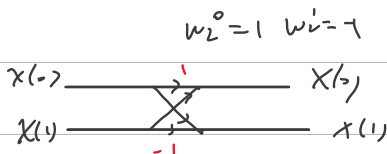
$$\Rightarrow \frac{N}{2} \text{ DFT} = \underline{X_e(k)} + X_o(k) W_N^k$$

$$\begin{aligned} X(k + \frac{N}{2}) &= X_e(k + \frac{N}{2}) + X_o(k + \frac{N}{2}) W_N^{k + \frac{N}{2}} \\ &= X_e(k) + X_o(k) W_N^k \cdot \underbrace{W_N^{\frac{N}{2}}}_{-1} \\ &= \underline{X_e(k) - X_o(k) W_N^k} \end{aligned}$$

$$\underline{2 \text{ 点 FFT: } X(k) = \sum_{n=0}^1 x(n) W_2^{nk}}$$

$$X(0) = X(0) W_2^0 + X(1) W_2^0$$

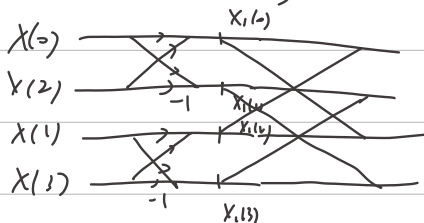
$$X(1) = X(0) W_2^0 + X(1) W_2^1$$



4点FFT: 奇偶分置

$2^2 \rightarrow 2$

$$X(0) \quad X(1) \quad X(2) \quad X(3)$$



日期:

FFT: $\text{coeff} \rightarrow \text{value}$

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_dx^d \quad n \geq d+1$$

$$p(x) = \{x^5 + 2x^4 + x^3 + 7x^2 + 5x + 1\}$$

$$= \underbrace{(2x^4 + 7x^2 + 1)}_{p_e(x^2)} + x \underbrace{(x^4 + x^2 + 5)}_{p_o(x^2)}$$

$$p(x) = p_e(x^2) + x p_o(x^2) \quad p(x^2) = 2x^2 + 7x + 1 \quad n \leq p \rightarrow 2p$$

$$p(x_i) = p_e(x_i^2) + x_i p_o(x_i^2) \quad n p \rightarrow \frac{n}{2} - 1$$

$$p(-x_i) = p_e(x_i^2) - x_i p_o(x_i^2) \quad O(k \log n)$$

$$FFT \quad p(x) = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$$

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}} : [w^0, w^1, \dots, w^{n-1}]$$

$$n=1 \Rightarrow p(1)$$

$$FFT: p_e(x^2) : [p_0, p_2, \dots, p_{n-2}]$$

$$FFT: p_o(x^2) : [p_1, p_3, \dots, p_{n-1}]$$

$$w^0, w^2, \dots, w^{n-2}$$

$$w^0, w^2, \dots, w^{n-2}$$

$$y_e = [p_e(w^0), p_e(w^2), \dots, p_e(w^{n-2})]$$

$$y_o = [p_o(w^0), p_o(w^2), \dots, p_o(w^{n-2})]$$

$$x_j = w^j$$

$$p(w^j) = p_e(w^{2j}) + w^j p_o(w^{2j})$$

$$y_e[i] = p_e(w^{2j})$$

$$-w^j = w^{j+\frac{n}{2}}$$

$$p(-w^j) = p_e(w^{2j}) - w^j p_o(w^{2j})$$

$$y_o[i] = p_o(w^{2j})$$

$$p(w^{j+\frac{n}{2}}) = p_e(w^{2j}) + w^{j+\frac{n}{2}} p_o(w^{2j})$$

$$p(w^j) = y_e[i] + w^j y_o[i] \quad j \in [0, 1, \dots, (\frac{n}{2}-1)]$$

$$p(w^{j+\frac{n}{2}}) = y_e[i] - w^j y_o[i]$$

日期: /

系统框图表示法.

$x(n) \rightarrow \boxed{D} \rightarrow x(n-1)$ 正时器: $y(n) = x(n-1)$

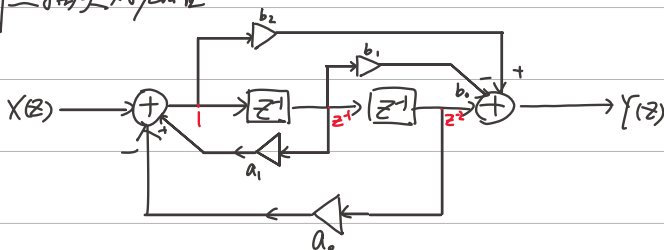
$x(n) \rightarrow \boxed{\times a} \rightarrow ax(n)$ 常数乘法器: $y(n) = ax(n)$

$x_1(n) \rightarrow \oplus \rightarrow x_1(n) + x_2(n)$ 加法器 $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$

z域: $x(z) \rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow z^{-1}x(z)$

标准结构的系统框图与系统函数的对应关系.

1) 各节点抽头对应系数



系统框图与系统函数的对应关系

$$H(z) = \frac{(b_0 z^2 - b_1 z^{-1} + b_2)}{(1 - a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2})}$$

✓
X(z) 延迟 1

分子多项式对应正反馈支路 (包含延迟器)
分母符号与分子相同

分母多项式对应输入和反馈支路
反馈支路所求取符号与分子相反

日期:

系统框图及其结构形式

1. 直接型系框图 2. 级联、并联

例. 改商数表示的差分方程如下. 请利用级数法和并级形式模拟设计.

$$y(n) - 0.5y(n-1) + 0.25y(n-2) - 0.125y(n-3) = 2x(n) + 2x(n-2)$$

初始状态为0, 并且连续:

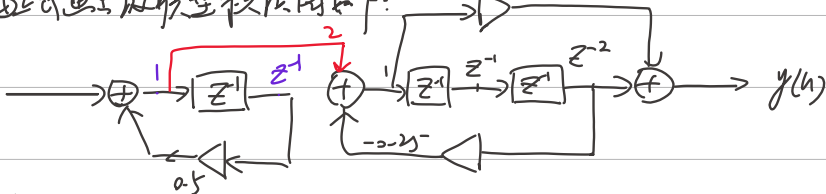
$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-2}Y(z) - 0.125z^{-3}Y(z) = 2X(z) + 2z^{-2}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 2z^{-2}}{-0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

①级联型:

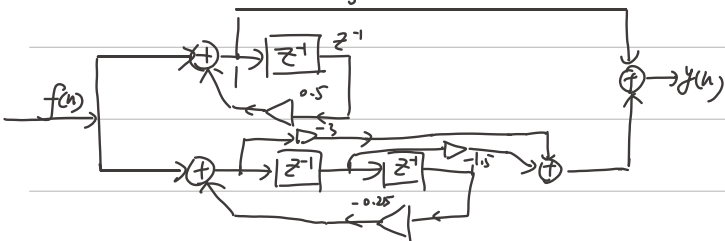
$$H(z) = \frac{2(1+z^2)}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-2})} = \left(\frac{2}{1-0.5z^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{1+z^2}{1+0.25z^{-2}}\right)$$

由此画出双联型核反应图如下:



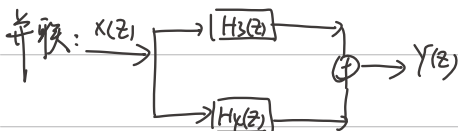
(2) 并联型:

$$H(z) = \frac{2(1+z^2)}{(1-0.5z^{-1})(1+0.25z^{-2})} = \frac{5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{-3-1.5z^{-1}}{1+0.25z^{-2}}$$

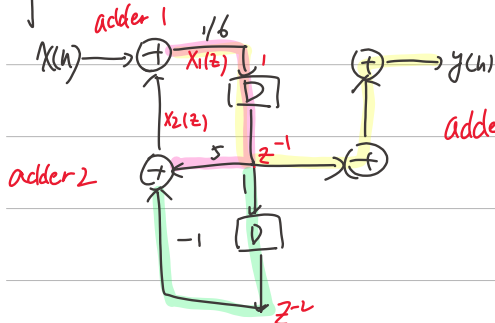


日期: /

$X(z)$



例: 求相同系统框图的系统函数及差分方程



adder 2: $X_2(z) = \frac{5}{6} z^{-1} X_1(z) - z^{-1} X_1(z)$

$$X_1(z) = X(z) + X_2(z)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}} X(z)$$

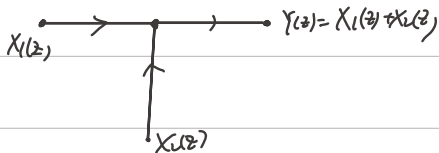
$$Y(z) = \frac{1}{6} z^{-1} X_1(z)$$

$$\therefore Y(z) = \frac{\frac{1}{6} z^{-1}}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}} X(z)$$

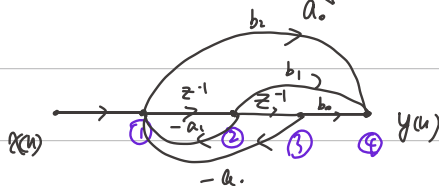
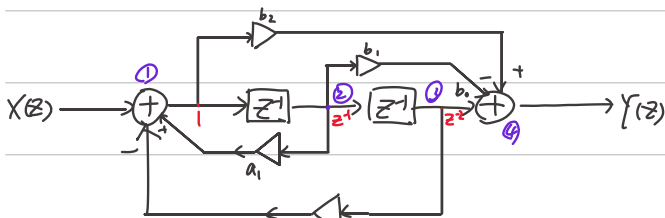
信号流图

$\xrightarrow{a} \quad Y(z) = aX(z)$

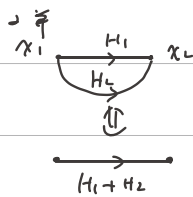
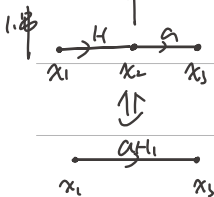
$\xrightarrow{z^{-1}} \quad Y(z) = z^{-1}X(z)$



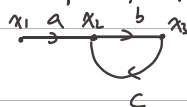
日期: /



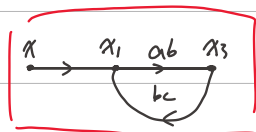
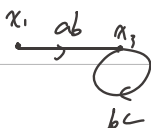
化简运算:



3. 前馈消除中间节点反馈:

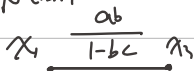


合并 $x_2 x_3$ 形成自环



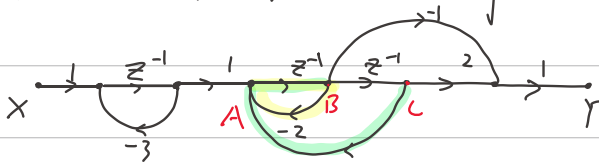
自环等效

2) 消去自环



日期: / /

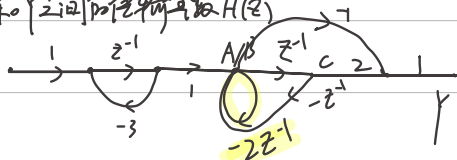
例: 下图为某线性时不变系统的信号流图, 请解答下列各题



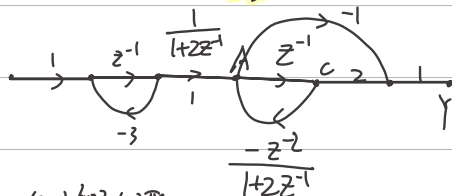
1) 消去中间节点 A 及由此产生的自环, 并画出消去节点 A 和自环后的信号流图

2) 求出 X 和 Y 之间的传输函数 $H(z)$

11) 合并 A 和 B



消除自环



如同前例作: 3) 求传输函数

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1+3z^{-1}} \times \frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}} \times \frac{-1+2z^{-1}}{1+\frac{z^{-2}}{1+2z^{-1}}}$$

日期: /

已知离散系统的系统函数为

FIR.

$$H(z) = \frac{z^3}{(z-0.4)(z^2-0.6z+0.25)}$$

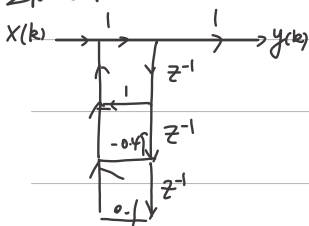
分别画出其直接型、级联型和并联型结构

写成 z^{-1} 形式

$$H(z) = \frac{1}{(1-0.4z^{-1})(1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2})}$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}+0.49z^{-2}-0.1z^{-3}}$$

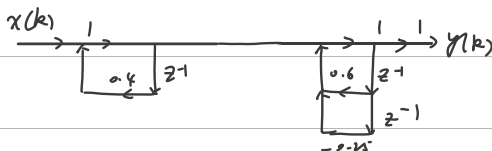
直接型结构:



级联型结构:

$$H(z) = \frac{1}{1-0.4z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}}$$

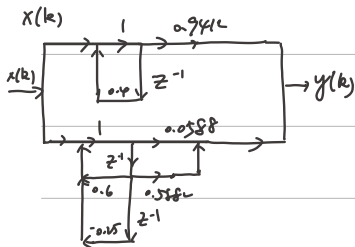
比较2个因式相乘: 2个直接型相乘



并联型结构: 比较2个分式相加的形式, 两个直接型相加.

$$H(z) = \frac{A}{1-0.4z^{-1}} + \frac{B+Cz^{-1}}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}} \Rightarrow \text{部分分式分解}$$

$$\begin{cases} A = 0.9412 \\ B = 0.588 \\ C = 0.588 \end{cases}$$



日期: /

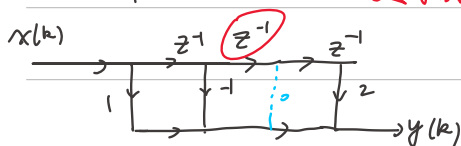
改: FIR 的系统函数为 $H(z) = (1+z^{-1})(1-2z^{-1}+2z^{-2})$

试画出直接型和级联型结构

$$H(z) = (1+z^{-1})(1-2z^{-1}+2z^{-2})$$

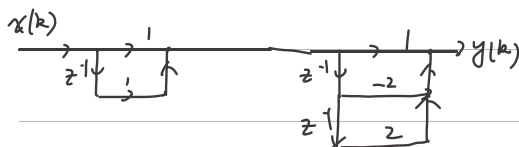
$$= 1 - z^{-1} + 2z^{-3}$$

延项不可省略



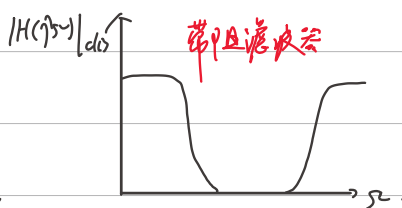
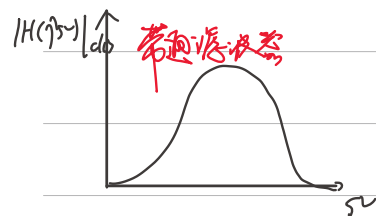
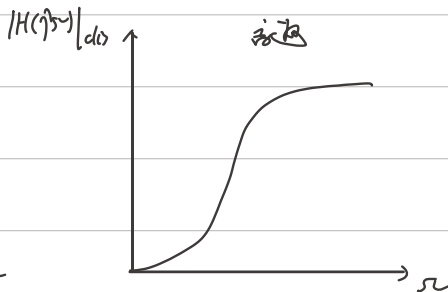
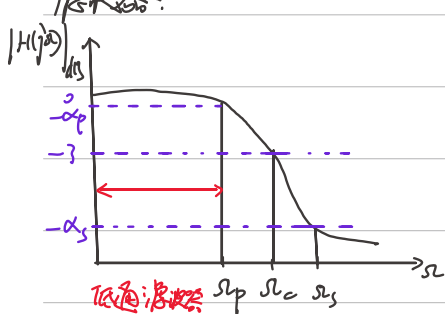
级联: 相乘 + 相乘

$$H(z) = (1+z^{-1})(1-2z^{-1}+2z^{-2})$$



日期: /

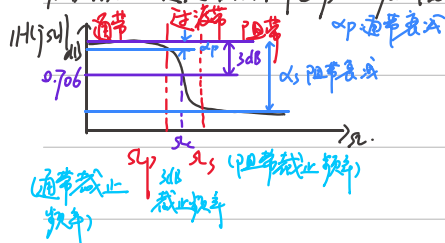
滤波器:



典型滤波器及其特性:

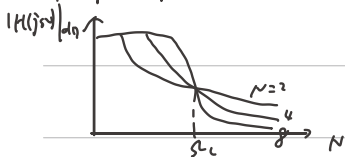
- 1) 巴特沃斯滤波器: 具有单调下降的幅频特性。
- 2) 切比雪夫滤波器: 在通带或阻带具有等波纹特性, 可以很高选择性。
- 3) 椭圆滤波器: 通带内最佳, 但是通带内均呈现等波纹幅频特性。
- 4) 贝塞尔滤波器: 在通带内具有线性相位特性。

1. 模拟低通滤波器的幅频响应函数 $|H(j\omega)|$:



日期: /

幅频特性与N的关系



全极点型

极点:

$$G_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (p - p_k)}$$

$$G_a(p) = \frac{1}{p^N + b_{N-1}p^{N-1} + \dots + b_1p + b_0}$$

例: 低通截止频率 $f_p = 5\text{kHz}$, 通带衰减 $\alpha_p = 2\text{dB}$, 阻带截止频率 $f_s = 12\text{kHz}$.

阻带衰减 $\alpha_s = 30\text{dB}$, 按上述指标设计巴特沃兹 LPF

解. step 1: 计算N

step 2: 查表求归一化LPF原型传输函数 $G_a(p)$

step 3: 计算3dB截止频率 ω_c

step 4: 令 $p = \frac{s}{\omega_c}$ 代入 $G_a(p)$ 得 $H_a(s)$

$$1) k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 41.323$$

2) 求 $G_a(p)$ (查表)

$$\lambda_{sp} = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{f_s}{f_p} = \frac{12\text{K}}{5\text{K}} = 2.4$$

$$G_a(p) = \frac{1}{p^5 + 3.2361p^4 + 4.2147p^3 + 3.4981p^2 + 2.2135p + 1}$$

$$N = \frac{19k_{sp}}{19\lambda_{sp}} = \frac{19 \times 41.323}{19 \times 2.4} = 4.25$$

$$\therefore \omega_c = \omega_p (10^{0.1\alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

(向上取整)

$$\therefore N = 5$$

$$\omega_c = 5\text{K} (10^{0.1 \times 2} - 1)^{-\frac{1}{2 \times 5}} = 5.27\text{KHz}$$

4) 令 $p = \frac{s}{\omega_c}$ 代入 $G_a(p)$ 得到 $H_a(s)$ 的低通传输函数.

例: $\omega_c = 2$, $G_c(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$ 求低通传输函数

$$H_a(s) = G_c\left(\frac{s}{\omega_c}\right) = G_c\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{2}\right) + 1} = \frac{4}{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}$$

日期: /

数字滤波器及其原理.

① 经典滤波器 ② 现代滤波器

$$x(t) = A \cos(2\pi f t) \rightarrow x(n) = A \cos(2\pi f T_s n)$$

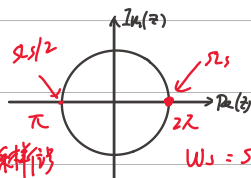
$$\omega = 2\pi f T_s = \Omega T_s = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

rad 1/c 频率

模拟信号采样后的频谱



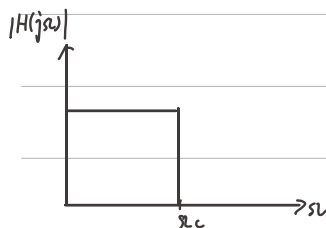
采样定理 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$



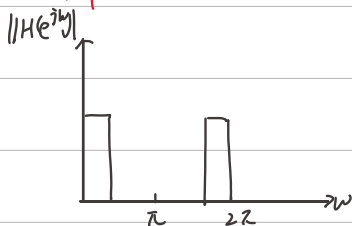
高频在π附近

又因为采样后的最高频率

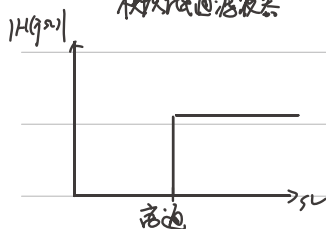
$$\omega_s = \Omega_s T_s = 2\pi$$



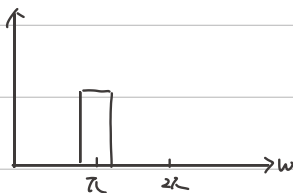
模拟低通滤波器



数字低通滤波器

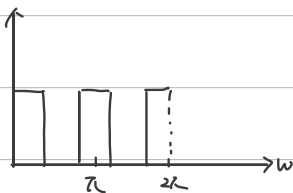
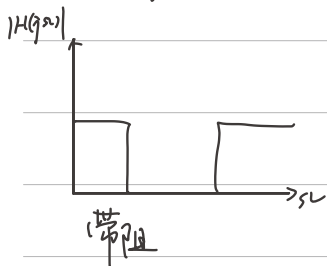
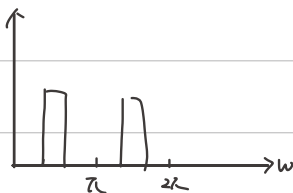
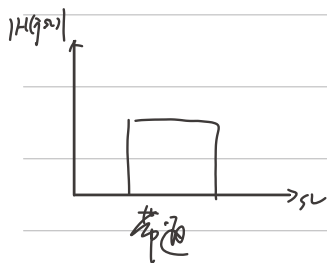


高通



π

日期: / /



数字滤波器类型快速判断:

1. 写出系统幅频特性函数 $|H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

2. 令 $\omega_0 = 0, \pi$ 等特殊值, 计算 $|H(e^{j\omega_0})|$

1) 若 $\omega_0 = 0$ 时, $|H(e^{j\omega_0})| = k (k > 0)$ 低通

2) 若 $\omega_0 = 0$ 时 $|H(e^{j\omega_0})| = 0$ 或很小

$\omega_0 = \pi$ 时 $|H(e^{j\omega_0})| = k (k > 0)$ 高通

3) 若 $\omega_0 = 0, \pi$ 时 $|H(e^{j\omega_0})| = 0$ 或很小

$\omega_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 时 $|H(e^{j\omega_0})| = k (k > 0)$ 带通

日期: /

数字滤波器的分类 — 按单位脉冲响应的长度分类:

IIR滤波器 无限长脉冲响应数字滤波器

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad \text{N阶 IIR 滤波器}$$

FIR滤波器 有限长脉冲响应数字滤波器

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (N-1) \text{ 阶 FIR 滤波器}$$

IIR: ① 直接法: 借助计算机设计 ② 间接法: 借助模拟滤波器设计.

FIR: ① 设计线性相位滤波器

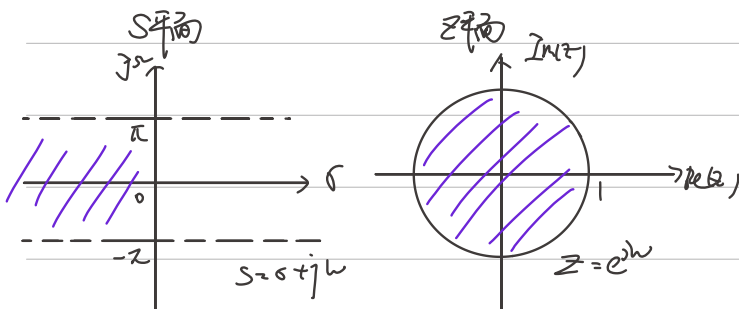
② 利用窗函数法、频率采样法和双线性变换法设计 (不可使用间接法)

间接法的 IIR 滤波器设计方法:

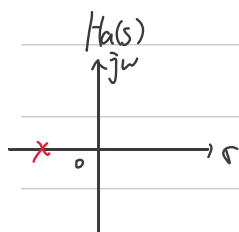
step 1: 借助模拟滤波器设计求传递函数 $H_a(s)$

2: $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ → ① 脉冲响应不变法 ② 双线性变换法

S平面和Z平面的映射 Laplace Z变换关系 $z = e^{sT}$



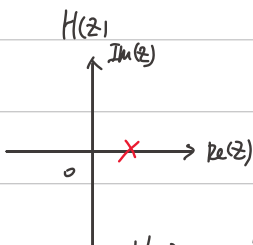
日期: /



$$H(s) = \frac{1}{s+0.9} \quad s_1 = -0.9$$

↓ $z = e^{sT}$

$$z_1 = e^{-0.9T}$$



$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-0.9T}z^{-1}}$$

$H(s)$ 转换成 $H(z)$ 的实用公式

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

说明 1) $e^{s_i T}$ 是 $H(s)$ 中每个 s 域极点转换成 z 域极点

2) A_i 是 $H(s)$ 部分分式展开的系数

3) 由教材对 $\frac{1}{1 - az^{-1}} \leftrightarrow a^n u(n)$ 可知.

$$\frac{1}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \leftrightarrow e^{s_i T n} u(n) \quad e^{-at} u(t)$$

4) T = 采样间隔, 其作用在于避免打远小时 $|H(e^{j\omega})|$ 值过大

如无特殊说明, 可忽略.

由于是对连续系统的单位冲激响应采样即可:

$$\hat{h}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) \delta(t - nT)$$

对应地, Fourier: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a\left(\frac{j\omega - jk\omega_s}{T}\right)$

日期: /

校正已设计好的PF

例: 用脉冲响应不变法设计数字低通滤波器, 要求通带和阻带具有单调下降性. 指标参数

已知: $\omega_p = 0.2\pi \text{ rad}$, $\alpha_p = 1 \text{ dB}$; $\omega_s = 0.35\pi \text{ rad}$, $\alpha_s = 15 \text{ dB}$.

$$\text{解: } \textcircled{1} \quad \omega_{sp} = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0.2\pi}{T} \text{ rad/s}, \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_{ss} = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0.35\pi}{T} \text{ rad/s}, \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

② 设计低通PF:

$$\lambda_{sp} = \frac{\omega_{ss}}{\omega_{sp}} = \frac{0.35}{0.2} = 1.75 \quad f_{sp} = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}} = 1.0875$$

$$N = \frac{19 f_{sp}}{19 \lambda_{sp}} = \frac{19 \cdot 1.0875}{19 \cdot 1.75} = 0.615 \quad \text{向上取整得 } N = 1$$

查表: $G_a(p) =$

$$3 \text{ dB 截止频率 } \omega_c = \omega_s (10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

$$H_a(s) = G_a\left(\frac{s}{\omega_c}\right) \rightarrow \text{求出极点 } s_1, s_2, s_3, \dots, s_N$$

$$z_1 = e^{s_1 T} \rightarrow \text{用交用公式求出 } H(z)$$

例: $H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$ 设 $T=1$, 试用脉冲响应不变法将其转换成数字滤波器

$$\text{解: } H_a(s) = \frac{1}{(2s+1)(s+1)} = \frac{1}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{s+1}$$

$$\text{极点: } s_1 = -\frac{1}{2} \quad s_2 = -1$$

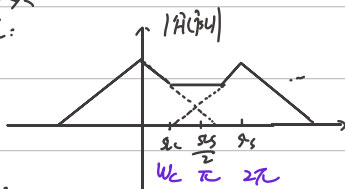
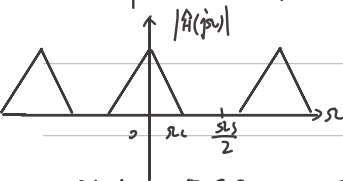
$$H(z) = \frac{T}{1 - e^{-0.5T} z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}} \quad \text{代入 } T=1 \text{ 即可}$$

日期: /

双线性变换法:

$\frac{s}{2}$ 或 $\frac{j\omega}{2}$ 称为模拟折叠频率。

信号不局限于 $\frac{s}{2}$ 奈氏频率内会发生混叠失真
频谱混叠:



若信号频率 ω 不局限于 $\omega = \pi$, 则频率 ω 会发生混叠失真

解决频谱混叠失真的方法: 增加阻带衰减指标

脉冲不变法设计 IIR 滤波器的局限性:

① 由于脉冲不变法要求严格带限, 故不能用于设计高通滤波器和带阻滤波器

② 连续系统的系统函数 $H(s)$ 必须是能够部分分解的, 才能利用脉冲不变法转换成离散系统的系统函数 $H(z)$

双线性变换法设计 IIR 数字滤波器

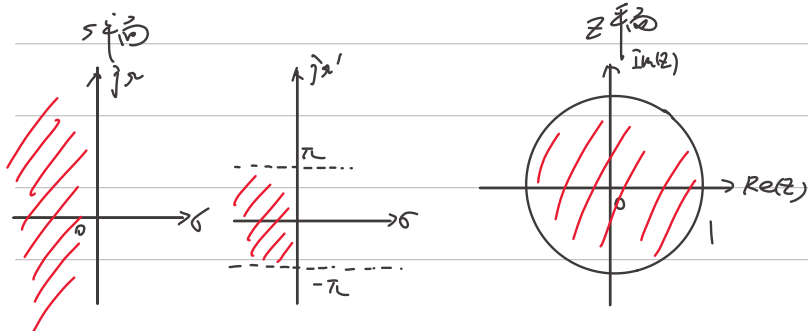
基本思路:

① 使得模拟频率 s 和数字频率 ω 的映射关系为 **单值** 映射关系

② 可以消除或者减少频率 π 附近的频谱混叠现象 适用于大延迟 用于设计带阻频率响应的滤波器设计

日期: /

s平面、z平面的映射关系(单值)



s和z的关系: $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 预畸变换: $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$

例: 用双线性变换设计低通滤波器, 要求通带边界具有单调下降性。

$\omega_p = 0.2 \text{ rad}, \alpha_p = 1 \text{ dB}; \omega_s = 0.315 \text{ rad}, \alpha_s = 15 \text{ dB}$

解: (1) 将数字滤波器的指标参数转换成模拟参数, 令采样周期 $T=2$ 。

$\Omega_p' = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_p}{2} = \tan(0.1\pi) = 0.3247, \alpha_p = 1 \text{ dB}$ f_c, f_s

$\Omega_s' = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_s}{2} = \tan(0.315\pi/2) = 0.519, \alpha_s = 15 \text{ dB}$

$T = \frac{1}{f_s} \quad \omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s}$

$\Omega_c = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega_c}{2})$

若已知的是模拟截止频率 Ω_p , 此时预畸公式为: $\Omega_p' = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$

$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s'}{\Omega_p'} \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}}$

$N = \frac{19k_{sp}}{19\lambda_{sp}} \quad \Omega_c = \Omega_s (10^{0.1\alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$

$N=5$, 查表 $\Rightarrow G(\omega) \rightarrow H(s) \rightarrow$ 令 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 得到 $H(z)$

日期: /

已知 $H_a(s) = \frac{s}{s+1}$ 设 $T=2$ 试用双线性变换法将其转换为数字滤波器。

解: $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$$= H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1-z^{-1}}{2}$$

频率变换设计高通滤波器:

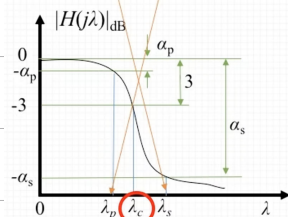
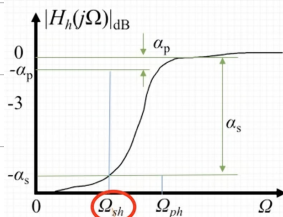
巴特沃兹模拟高通滤波器设计:

① 参考指标:

通带截止频率 ω_{ph} 通带衰减 α_p

阻带截止频率 ω_{sh} 阻带衰减 α_s

② 设计步骤:



1) 将高通滤波器的指标转换为低通归一化指标

2) 按巴特沃兹 4P 计算阶数 N

归一化通带截止频率 $\omega_p = 1$

3) 查表得 $G_{\alpha p}$

归一化阻带截止频率 $\lambda_s = \frac{\omega_{sh}}{\omega_{ph}}$

4) 计算归一化阻带截止频率 $\lambda_c = \lambda_p (10^{\frac{\alpha_s}{20}} - 1)^{\frac{1}{2N}}$

5) 令 $p = \frac{\omega_{ph}}{\omega_c}$ 代入得 $H_{hp}(s)$

模拟高通滤波器到数字高通滤波器

双线性变换法: $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

α : 模拟频率映射到数字频率
 数字频率在 0 到 π 之间, 一般取 $\alpha = -\frac{1}{2}$

日期:

/

例: 设计一阶高通滤波器, 通带截止频率 $\omega_p = 0.8 \text{ rad/s}$, 通带衰减 α_p 不大于 3dB

阻带截止频率 $\omega_s = 0.4 \text{ rad/s}$, 阻带衰减 α_s 不小于 15dB.

解: (1) 预畸校正 (双线性变换法)

$$\omega'_{p1} = \tan \frac{\omega_p}{2} = 3.7725 \text{ rad/s} \quad \omega'_{s1} = \tan \frac{\omega_s}{2} = 0.4075 \text{ rad/s}$$

(2) 将 HPT 参数转换为 LPT 指标.

$$\lambda_p = 1, \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\lambda_s = \frac{\omega'_{p1}}{\omega'_{s1}} = 3.7790, \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

(3) 按照巴特沃斯滤波器 $H_{BW}(s)$

$$\lambda_p, K_{sp}, N, \lambda_c \quad \text{查表得 } G_{BW}(p)$$

(4) $G_{BW}(p)$ 坐标变换 $H_{HP}(s)$

(5) 用双线性变换法将 $H_{HP}(s)$ 转换为 $H(z)$, 取 $T=2$.

$$H_{HP}(s) = G_{BW}(p) \Big|_{p=\frac{s-\omega'_{p1}}{s+\omega'_{p1}}}$$

$$H(z) = H_{HP}(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

日期: /

IIR滤波器的基本网络结构

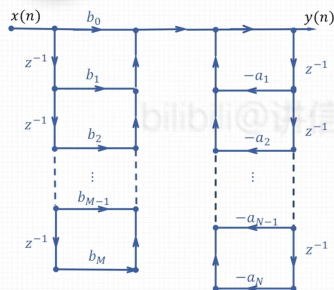
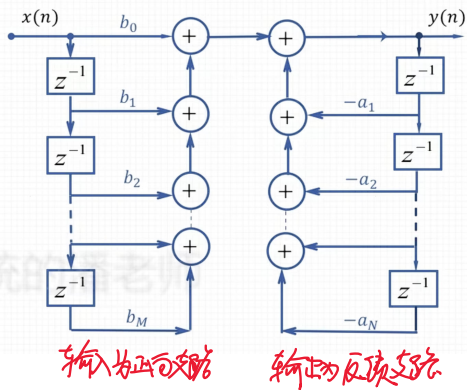
IIR数字滤波器的系数方程及其模数

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

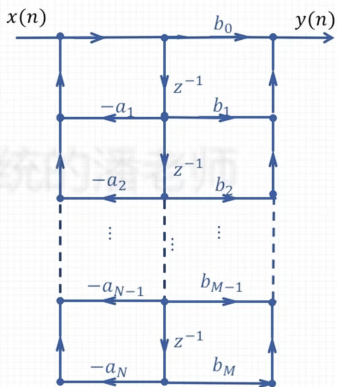
IIR数字滤波器的直接型I框图结构

也可以用信号流程图

IIR数字滤波器的直接型II型(典范型)



IIR数字滤波器的直接型I信号流程图



IIR数字滤波器的直接型II信号流程图

日期: /

例: 已知 IIR 滤波器的直接 II 型 (如图) 所示, 求:

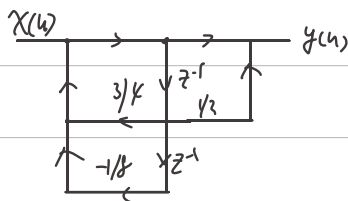
1) 滤波器的系统函数差分方程

2) 设 $h(-1)=1$, $h(-2)=2$, 求系统单位脉冲响应的前 3 个样值

3) 分析该零极点是否有有限值

解: 1) $H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, 则有



$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

2) 令 $x(n) = \delta(n)$, 则 $y(n) = h(n)$

$$h(n) - \frac{3}{4}h(n-1) + \frac{1}{8}h(n-2) = \delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1)$$

$$h(n) = \left[\frac{3}{4}h(n-1) - \frac{1}{8}h(n-2) \right] + \left[\delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1) \right]$$

由输出反馈决定 由输入决定

$$h(0) = \frac{3}{4}h(-1) - \frac{1}{8}h(-2) + \delta(0) + \frac{1}{3}\delta(-1) = \frac{3}{2}$$

$$h(1) = \frac{3}{4}h(0) - \frac{1}{8}h(-1) + \delta(1) + \frac{1}{3}\delta(0) = \frac{4}{3}$$

$$h(2) = \frac{3}{4}h(1) - \frac{1}{8}h(0) + \delta(2) + \frac{1}{3}\delta(1) = \frac{7}{8}$$

$h(2)$ 以后的值是由前两个时刻的值决定, 即系统不断将输出反馈到输入端产生新的输出, 所以 $h(n)$ 是无限值. (即 IIR 滤波器是无限脉冲响应滤波器)

日期: /

FIR滤波器的基本性质:

数学模型: $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k)$ 无反馈习语

单位脉冲响应: $h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \delta(n-k)$

系统函数: $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}$

零极点: 1) 令 $\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} = 0$ 系统有 $(N-1)$ 个零点 (z的指数是 $N-1$ 次方)

2) 对于 FIR 滤波器因并全使用, 即 $1 + \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} = 1$

故 $\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} = 0 \rightarrow z^{-k} = 0$ 即不存在有 $-(N-1)$ 阶极点

稳定性: 1) 极点在 $z=0$ 在单位圆内

2) 系统函数为有限延迟形成, 即为右边序列, 所以系统所收敛域包括

单位圆, 系统永远稳定。

FIR滤波器的频率特性和阶数。

1. 单位脉冲响应和频率响应的一般定义

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \delta(n-k) \quad h(0) = b_0 \quad h(1) = b_1 \dots h(k) = b_k$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j\omega k} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-j\omega k}$$

系统函数: $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}$

阶数: 系统中延迟器的个数 (z的指数)

$$\sim \text{频率} \rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-j\omega k}$$

日期:

/

5类: 1). 第一类线性相位滤波器

条件: (1). $h(n)$ 为实序列 (2). 满足 $h(n) = h(N-1-n)$

2). 第二类线性相位滤波器

条件: (1). $h(n)$ 为实序列 (2). 满足 $h(n) = -h(N-1-n)$

例: ① 已知差分方程 $y(n) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 x(n-i)$

$$h(n) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 x(n-i) = \frac{1}{5} [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)]$$

由上可知 $h(n) = h(4-n)$ 即 $h(n) = h(N-1-n)$ 第一类

$$\textcircled{2} h(n) = [2, 2, 3, 0, -3, -2, -2]$$

分类: 滤波器阶数多少? 是否可滤除直流信号

第一类. 6阶. 令 $\omega = 0$ $H(e^{j0}) = 0$ 可滤除

$$\textcircled{3} \text{已知 } h(n) = [0.54 - 0.46 \cos(\frac{n\pi}{15})] R_N(n)$$

$$h(N-1-n) = [0.54 - 0.46 \cos(\frac{(N-1-n)\pi}{15} - \frac{n\pi}{15})] = \cos(\frac{n\pi}{15})$$

$$\frac{(N-1)\pi}{15} = 2\pi \rightarrow N=31$$

当 $N=31$ 时, $h(N-1-n) = h(n)$ 第一类线性相位滤波器

日期: /

窗函数法设计 FIR 滤波器

1. 对称约束: $h(n) = h(N-1-n)$

2. 系统群延迟: $\tau = \frac{N-1}{2}$ 可理解为对称轴

3. 相位特性 $\varphi(\omega) = -\tau\omega$

4. 幅频响应特性

情况 1 (N 为奇数): $|H(e^{j\omega})| = h(\tau) + \sum_{k=0}^{\tau-1} 2h(k) \cos[\omega(N-k-\tau)]$

情况 2 (N 为偶数): $|H(e^{j\omega})| = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(k) \cos[\omega(N-k-\tau)]$

例: 已知一个理想冲激响应 $h(n) = \{1, 2, 1\}$ 回答下列问题

1) 判断 FIR 系统类型

2) 写出系统的相位特性和幅频特性函数

3) 若输入为 $x(n) = 4 + 3\cos(\frac{\pi}{5}n - \frac{\pi}{2}) + 3\cos(\frac{7\pi}{8}n)$, 求输出 $y(n)$

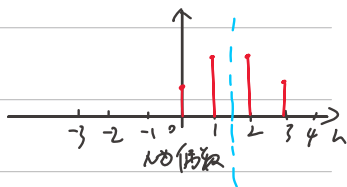
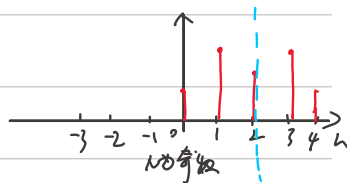
解: 1) 关于 $n=1$ 取对称, 第一类

$$2) \tau = \frac{N-1}{2} = 1$$

相位: $\varphi(\omega) = -\tau\omega = -\omega$

幅频: $|H(e^{j\omega})| = h(\tau) + \sum_{k=0}^{\tau-1} 2h(k) \cos[\omega(N-k-\tau)] = 2 + 2\cos[\omega(N-k-\tau)] = 2 + 2\cos\omega$

例中直接 0, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{8}$ 的幅频、相位值



日期: /

第一类线性相位滤波器设计LPF

理想LPF:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1; & |\omega| \leq \omega_c \\ 0; & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c n)$$

能否实现理想LPF 幅频响应和FIR序列:

$$h_d(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n-\tau)] \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

写成 sinc 形式

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\text{Si}[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} & n \neq \tau \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = \tau \end{cases}$$

$$h(n) = h_d(n) \cdot R_N(n)$$

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

常用窗函数:



常用窗函数

1、矩形窗 $w(n) = R_N(n)$

$$2、三角窗 w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}; & 0 \leq n \leq \frac{1}{2}(N-1) \\ 2 - \frac{2n}{N-1}; & \frac{1}{2}(N-1) \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

3、汉宁窗 $w(n) = 0.5[1 - \cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$

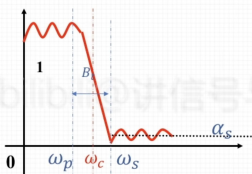
4、哈明窗 $w(n) = [0.54 - 0.46\cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$

5、布莱克曼窗 $w(n) = [0.42 - 0.5\cos(\frac{2n\pi}{N-1}) + 0.08\cos(\frac{4n\pi}{N-1})]R_N(n)$

日期: /

窗函数频谱的性能指标主要是指过渡带宽度、旁瓣电平

加窗后频响特性函数图



六种窗函数的基本参数

窗函数类型	阻带最小衰减	过渡带 B_t
矩形窗	-21dB	$1.8\pi/N$
三角窗	-25dB	$6.1\pi/N$
汉宁窗	-44dB	$6.2\pi/N$
哈明窗	-53dB	$6.6\pi/N$
布莱克曼窗	-74dB	$11\pi/N$
凯塞窗 ($\beta = 7.865$)	-80dB	$10\pi/N$

阻带最小衰减 α_s

过渡带宽度 $B_t = \omega_s - \omega_p$

3dB截止频率 $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2$

例: 用窗函数法设计一个低通滤波器, 该滤波器的截止频率为 $\omega_p = 0.2\pi$, 阻带截止频率 $\omega_s = 0.5\pi$, 阻带衰减为 $\alpha_s = 40\text{dB}$.

阻带截止频率 $\omega_s = 0.5\pi$, 阻带衰减为 $\alpha_s = 40\text{dB}$.

$\alpha_s = 40\text{dB} \rightarrow$ 选择: 汉宁窗

$$\text{算 } N \text{ 值: } \frac{6.2\pi}{N} = (\omega_s - \omega_p) = 0.2\pi \Rightarrow N = 31$$

$$\text{阻带截止频率 } \omega_c = \frac{1}{2}(\omega_p + \omega_s) = 0.35\pi$$

$$\text{汉宁窗: } w(n) = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

$$\text{理想滤波器单位脉冲响应 } h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$$

$$\begin{aligned} \text{代入 } N=31 \text{ 得: } h(n) &= \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} \times 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{31-1}\right) \right] R_{31}(n) \\ &= \frac{\sin[0.35\pi(n-\tau)]}{2\pi(n-\tau)} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi n}{15}\right) \right] R_{31}(n) \end{aligned}$$

$$\text{令 } n=\tau \text{ 得 } h(15) = \frac{\omega_c}{\pi} = \frac{(0.3+0.5)\pi/2}{\pi} = 0.4$$

则所满足要求的低通滤波器的单位脉冲响应为:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin[0.4\pi(n-15)]}{2\pi(n-15)} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi n}{15}\right) \right] R_{31}(n); n \neq \tau \\ 0.4; n = \tau \end{cases}$$

检验指标: 利用公式求出系统的频响

$$|H(e^{j\omega})| = h(\tau) + \sum_{n=\tau}^{\tau-1} 2h(n)\cos[\omega(n-\tau)] = 0.4 + \sum_{n=0}^{15} 2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$$

如不满足可适当调整N值, 使之符合题干给出的条件

日期:

/

注: 第一类线性相位滤波器可以实现的滤波器类型:

1. N 为奇数时, 可以实现低通、带通、高通、带阻滤波
2. N 为偶数时, 可以实现低通、带通, 不能实现高通、带阻滤波



窗函数法第一类FIR低通滤波器设计步骤

- 1、根据阻带衰减选择合适的窗函数 $w(n)$
- 2、根据窗函数过渡带公式计算 N 值(N 取奇数可以适用各种滤波器)
- 3、逼近理想滤波器频响的单位脉冲响应序列为 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}; & n \neq \tau \\ \omega_c/\pi; & n = \tau = (N-1)/2 \end{cases}$$

- 4、所设计的滤波器单位脉冲响应为: $h(n) = h_d(n)w(n)$
- 5、验证系统的参数是否符合题干要求, 如不符合可以调整 N 值