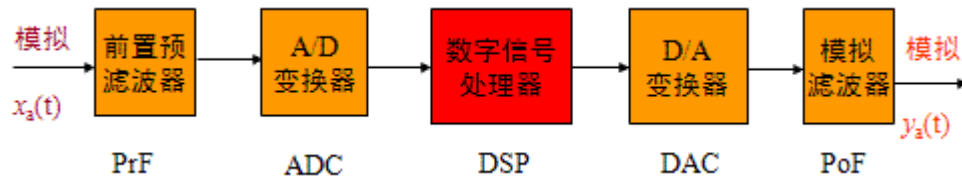


绪论：本章介绍数字信号处理课程的基本概念。

0.2 数字信号处理系统的基本组成



(1) 前置滤波器

将输入信号 $x_a(t)$ 中高于某一频率（称折叠频率，等于抽样频率的一半）的分量加以滤除。

(2) A/D 变换器

在 A/D 变换器中每隔 T 秒（抽样周期）取出一次 $x_a(t)$ 的幅度，抽样后的信号称为离散信号。在 A/D 变换器中的保持电路中进一步变换为若干位码。

(3) 数字信号处理器（DSP）

(4) D/A 变换器

按照预定要求，在处理器中将信号序列 $x(n)$ 进行加工处理得到输出信号 $y(n)$ 。由一个二进制码流产生一个阶梯波形，是形成模拟信号的第一步。

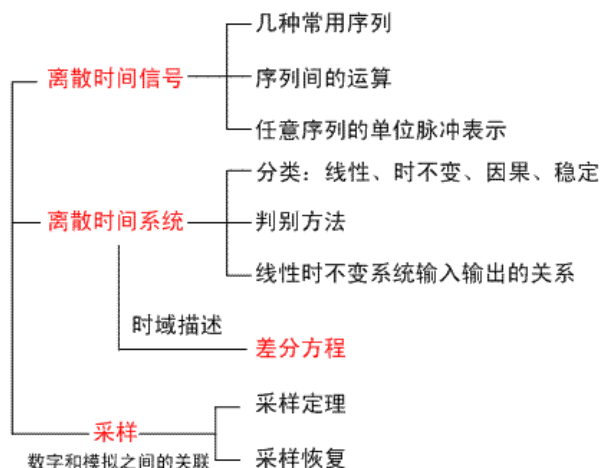
(5) 模拟滤波器

把阶梯波形平滑成预期的模拟信号；以滤除掉不必要的高频分量，生成所需的模拟信号 $y_a(t)$ 。

0.3 数字信号处理的特点

(1) 灵活性。(2) 高精度和高稳定性。(3) 便于大规模集成。(4) 对数字信号可以存储、运算、系统可以获得高性能指标。

第一章



1.1 离散时间信号

1.离散时间信号的定义

由模拟信号等间隔采样得到： $x(n) = x_a \big|_{t=nT} = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty$ 。

2.几种基本离散时间信号（记住定义）

矩形序列[0,N-1]

ω 是正弦序列数字域的频率，单位是弧度。

对连续信号中的正弦信号进行采样，可得正弦序列。设连续信号为 $x_a(t) = \sin \Omega t$ ，它的采样值为

$x(n) = x_a(nT) = \sin n\Omega T$ ，因此 $\omega = \Omega T = \Omega / f_s$ （重点）

ω 的单位为弧度， Ω 的单位为弧度/秒。本书中，我们一律以 ω 表示数字域频率，而以 Ω 及 f 表示模拟域频率。

（7）周期序列(重点)

所有 n 存在一个最小的正整数 N ，满足： $x(n) = x(n + N)$ ，则称序列 $x(n)$ 是周期序列，周期为 N 。（注意：按此定义，模拟信号是周期信号，采用后的离散信号未必是周期的）

3.信号运算

4.信号分解（重点）

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)$$

1.2 时域离散系统

时域离散系统定义 $\xrightarrow{x(n)} \boxed{T[\cdot]} \xrightarrow{y(n)} y(n) = T[x(n)]$

1 线性系统（重点）

判定公式：

若 $y_1(n) = T[x_1(n)]$, $y_2(n) = T[x_2(n)]$ 则 $y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$

2 时不变系统（重点）

判定公式： $y(n)=T[x(n)]$ $y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$

例：判断下列系统是否为线性、时不变系统。（重点）

(1) $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$;

解：

(1) 令：输入为 $x(n-n_0)$ ，输出为 $y'(n) = x(n-n_0) + 2x(n-n_0-1) + 3x(n-n_0-2)$
 $y(n-n_0) = x(n-n_0) + 2x(n-n_0-1) + 3x(n-n_0-2) = y'(n)$

故该系统是时不变系统。

$$\begin{aligned} y(n) &= T[ax_1(n) + bx_2(n)] \\ &= ax_1(n) + bx_2(n) + 2(ax_1(n-1) + bx_2(n-1)) + 3(ax_1(n-2) + bx_2(n-2)) \end{aligned}$$

$$T[ax_1(n)] = ax_1(n) + 2ax_1(n-1) + 3ax_1(n-2)$$

$$T[bx_2(n)] = bx_2(n) + 2bx_2(n-1) + 3bx_2(n-2)$$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

故该系统是线性系统。

3 线性时不变系统（LTI 或者 LSI 系统）输入与输出之间关系（重点）：

重点：线性时不变系统的输出等于输入序列和该系统的单位脉冲响应的卷积

【说明】离散时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h(n)$ 为系统对单位冲激序列 $\delta(n)$ 的零状态响应。
在时域，LTI 系统可以由其单位冲激响应 $h(n)$ 唯一确定

LTI 系统的输入输出关系可以由卷积运算描述： $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$

卷积的求解方法（重点）：

线性卷积满足交换律，设两序列长度分别是 **N** 和 **M**，线性卷积后序列的长度为 **N+M-1**。

卷积的计算过程包括翻转、移位、相乘、相加四个过程。

4. 系统因果性和稳定性的判定（重点）

1)稳定系统：有界的输入产生的输出也有界的系统，即：若 $|x(n)| < \infty$ ，则 $|y(n)| < \infty$ （记住!!）

线性移不变系统是稳定系统的充要条件: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ (系统稳定的充分必要条件是系统的单位脉

冲响应绝对可和) (记住!!)

或: 其系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆 $|z|=1$ (记住!!)

2) 因果系统: n_0 时刻的输出 $y(n_0)$ 只由 n_0 时刻之前的输入 $x(n), n \leq n_0$ 决定 (记住!!)

线性移不变系统是因果系统的充要条件: $h(n) = 0, n < 0$ (记住!!) 因果系统的单位脉冲响应必然是因果序列。(记住!!)

或: 其系统函数 $H(z)$ 的收敛域在某圆外部: 即: $|z| > R_x$ (记住!!)

3) 稳定因果系统: 同时满足上述两个条件的系统。

线性移不变系统是因果稳定系统的充要条件: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, h(n) = 0, n < 0$ (记住!!)

或: $H(z)$ 的极点在单位圆内 $H(z)$ 的收敛域满足: $|z| > R_{x-}, R_{x-} < 1$ (记住!!)

例: 设某线性时不变系统的单位取样响应为 $h(n) = a^n u(n)$ (a 为实数), 分析系统的因果性和稳定性。(重点)

解: 讨论因果性:

因为 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, 所以该系统是因果系统。

讨论稳定性:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \begin{cases} \frac{1}{1-|a|} & |a| < 1 \\ \infty & |a| \geq 1 \end{cases}$$

∴

∴ 当 $|a| < 1$ 时, 系统是稳定的; 否则, 系统不稳定。

例: 设某线性时不变系统的单位取样响应为 $h(n) = -a^n u(-n-1)$ (a 为实数), 分析系统的因果性和稳定性。(重点)

解: 讨论因果性:

因为 $n < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, 所以该系统是非因果系统。

讨论稳定性:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |a^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a|^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = \begin{cases} \frac{1}{|a|-1} & |a| > 1 \\ \infty & |a| \leq 1 \end{cases}$$

∴

∴ 当 $|a| > 1$ 时, 系统是稳定的; 否则, 系统不稳定。

1.3 线性常系数差分方程

1 差分方程定义

卷积和是一种 LTI 系统的数学模型，一般情况下，我们可以用差分方程描述 LTI 系统的输入输出

关系。
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

差分方程给出了系统响应 $y[n]$ 的内部关系。为得到 $y[n]$ 的显式解，必须求解方程。

2 差分方程求解

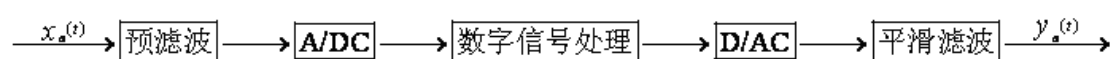
几点结论（重点）

（1）对于实际系统，用递推解法求解，总是由初始条件向 $n>0$ 的方向递推，是一个因果解。但对于差分方程，其本身也可以向 $n<0$ 的方向递推，得到的是非因果解。因此差分方程本身不能确定该系统是因果系统还是非因果系统，还需要用初始条件进行限制。

（2）一个线性常系数差分方程描述的系统不一定是线性非时变系统，这和系统的初始状态有关。如果系统是因果的，一般在输入 $x(n)=0(n<n_0)$ 时，则输出 $y(n)=0(n<n_0)$ ，系统是线性非时变系统。

1.4 模拟信号数字处理方法

1 模拟信号数字处理框图



$x_a(t)$ ：模拟信号输入

预滤波：目的是限制带宽（一般使用低通滤波器）

① 采样：将信号在时间上离散化

A/DC：模/数转换 ——>

② 量化：将信号在幅度上离散化（量化中幅度值=采样幅度值）

③ 编码：将幅度值表示成二进制位（条件 $f_s \geq 2f_c$ ）

数字信号处理：对信号进行运算处理

D/AC：数/模转换（一般用采样保持电路实现：台阶状连续时间信号 → 在采样时刻幅度发生跳变）

平滑滤波：滤除信号中高频成分（低通滤波器），使信号变得平滑

2. 连续信号的采样

对连续信号进行理想采样，设采样脉冲 $p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ ，则采样输出

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT)$$

在讨论理想采样后，信号频谱发生的变化时，可遵循下面的思路：

1) 由 $x_a(t) \rightarrow X_a(\Omega)$ ；2) 由 $\delta_T(t) \rightarrow \delta_T(\Omega)$ ；

3) 根据频域卷积定理，由 $\hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} [X_a(\Omega) * \delta_T(\Omega)]$ 计算出 $\hat{X}_a(\Omega)$ 。

计算过程：

$$1) X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

2) 周期信号可以用傅里叶级数展开，因此

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{jn\Omega_s t}$$

其中系数

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

所以

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其傅里叶变换

$$\delta_T(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s)$$

$$3) \hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} [X_a(\Omega) * \delta_T(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\tau) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s - \tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega_s) \cdot \delta(\Omega - n\Omega_s - \tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega_s)$$

因此，采样后信号频谱产生周期延拓，周期为 Ω_s ，同时幅度为原来的 $1/T$ 倍。这是一个非常重要的性质，应熟练掌握。

3 时域抽样定理（重点）

一个限带模拟信号 $x_a(t)$ ，若其频谱的最高频率为 F_0 ，对它进行等间隔抽样而得 $x(n)$ ，抽样周期为 T ，或抽样频率为 $F_s = 1/T$ ；只有在抽样频率 $F_s \geq 2F_0$ 时，才可由 $x_a(t)$ 准确恢复 $x(n)$ 。

例：有一连续信号 $x_a(t) = \cos(2\pi ft + \varphi)$ ，式中， $f = 20\text{Hz}, \varphi = \frac{\pi}{2}$ (1) 求出 $x_a(t)$ 的周期。

(2) 用采样间隔 $T = 0.02\text{s}$ 对 $x_a(t)$ 进行采样，试写出采样信号 $\tilde{x}_a(t)$ 的表达式。

(3) 求出对应 $\tilde{x}_a(t)$ 的时域离散信号(序列) $x(n)$ ，并求出 $x(n)$ 的周期。

解：(1) $x_a(t)$ 周期为 $T = \frac{1}{f} = 0.05\text{s}$

$$(2) \hat{x}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(2\pi fnT)] \delta(t - nT) (T = 0.05\text{s})$$

(3) $x(n)$ 的数字频率 $\omega = 0.8\pi$ ，故 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.8\pi} = \frac{5}{2}$ ，因而周期 $N=5$ ，所以 $x(n) = \cos(0.8\pi n + \pi/2)$

简答题：（重点）

1. 离散信号频谱函数的一般特点是什么？

第二章：本章涉及信号及系统的频域分析方法，概念较多，但很基础，学习时要注意。



2.1 序列的傅里叶变换的定义及性质

1. 定义

DTFT 是一个用来确定离散时间序列频谱的重要数学工具。

物理意义：傅里叶变换是将对信号的时域分析转换为对其在频域的分析，便于研究问题。

若序列 $x(n)$ 满足绝对可和条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

则其离散时间傅里叶变换（DiscreteTimeFourierTransform-DTFT：非周期序列的傅里叶变换）定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \text{ ----- (记住!!)}$$

$$\text{反变换定义为: } x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \text{ -----}$$

傅里叶变换对 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$

例：设 $x(n) = R_4(n)$ ，求其序列傅里叶变换。（重点）

解

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_N(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \end{aligned}$$

当 $N = 4$ 时

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega/2} e^{-j\frac{3}{2}\omega} \quad (2-5)$$

$X(e^{j\omega})$ 的幅度和相位随 ω 变化曲线如图 2.1 所示。

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\frac{4-1}{2}\omega + \varphi$$

$$\varphi = 0 \text{ 或 } \pi$$

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega \cdot 4/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

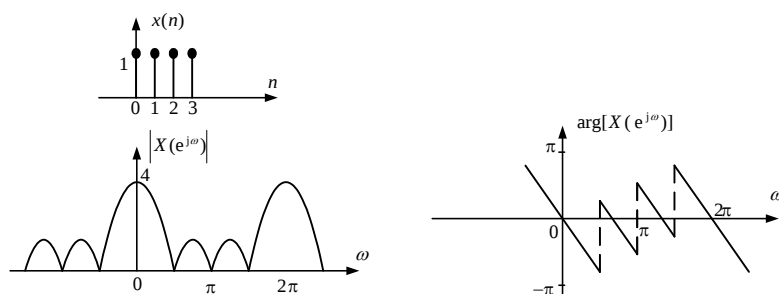


图 2.1 $R_4(n)$ 的幅度与相位曲线

例：试求如下序列的傅里叶变换：（重点）

$$\begin{aligned}
 (4) \quad X_4(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(n+3) - u(n-4)] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-3}^3 e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} + \sum_{n=1}^3 e^{j\omega n} \\
 &= \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{1 - e^{j3\omega}}{1 - e^{j\omega}} e^{j\omega} = \frac{1 - e^{-j7\omega}}{1 - e^{-j\omega}} e^{j3\omega} = \frac{\sin\left(\frac{7}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \\
 \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}) / (2j)}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) / (2j)} \\
 &= e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}
 \end{aligned}$$

如果 $\omega = 2\pi k / N$ ，那么根据洛比达法则有

$$\frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} = N \delta(0) (k=0) \text{ (或 } N \delta(N) (k=N) \text{)}$$

(5) 序列的功率和能量

$$\text{能量: } E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

$$\text{功率: } P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

(6) 相关函数——与随机信号的定义运算相同

2.性质

1) 周期性（重点）：DTFT 是关于 ω 的周期为 2π 的周期函数。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi M)n} = X(e^{j(\omega+2\pi M)}) \quad M \text{ 为整数}$$

3) 时移特性（重点）

$$DTFT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

4) 频移特性

$$DTFT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

5) 时域卷积定理 (重点)

$$DTFT[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$$

6) 频域卷积定理

$$DTFT[x_1(n) \cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} [X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})]$$

7) 帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

时域总能量等于频域一周期内总能量。

7) 幅度频谱为 ω 的偶函数, 相位频谱为 ω 的奇函数。

8) $X(e^{j\omega})$ 的实部为 ω 的偶函数, $X(e^{j\omega})$ 的虚部为 ω 的奇函数。

对称关系的总结 (重点):

如果 $x[n]$ 为复数序列, 其 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$,

(a) $x[n]$ 实部的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 的共轭对称部分 -----

$$x_{re}[n] \leftrightarrow X_{cs}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\}$$

(b) $x[n]$ 虚部的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 的反共轭对称部分 -----

$$x_{im}[n] \leftrightarrow X_{ca}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\}$$

(c) $x[n]$ 的共轭对称部分的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 的实部 -----

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[-n]\} \leftrightarrow X_{re}(e^{j\omega})$$

(d) $x[n]$ 的反共轭对称部分的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 的虚部 -----

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[-n]\} \leftrightarrow jX_{im}(e^{j\omega})$$

如果实序列 $x[n]$ 的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$,

(e) $x[n]$ 的偶对称部分的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 的实部,

$$----- x_{ev}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x[-n]\} \leftrightarrow X_{re}(e^{j\omega})$$

(f) $x[n]$ 的奇对称部分的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})$ 的虚部,

$$----- x_{od}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[-n]\} \leftrightarrow jX_{im}(e^{j\omega})$$

2.2 时域离散信号的傅里叶变换与模拟信号傅里叶变换之间的关系:

$$X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega) \quad X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \quad \text{式中} \quad \Omega_s = 2\pi F_s = \frac{2\pi}{T}$$

2.3 序列的 Z 变换

1 Z 变换定义(重点)

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad \text{----- (记住!!)}$$

其中, $z = e^s, s = \sigma + j\omega$ 。Z 变换存在情况下的 Z 变量取值范围称为**收敛域(ROC)**。

注意: Z 变换+不同收敛域 $\Rightarrow$ 对应不同收敛域的不同序列

唯一
序列 $\Rightarrow$ (Z 变换+收敛域) (重点)

例: 求以下序列的 Z 变换及收敛域: (重点)

$$(2) -2^{-n}u(-n-1);$$

解:

$$\begin{aligned} (2) \quad ZT[-2^{-n}u(-n-1)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -2^{-n}u(-n-1)z^{-n} = \sum_{n=-1}^{\infty} -2^{-n}z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -2^n z^n \\ &= \frac{-2z}{1-2z} = \frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[说明]上题也可以改为求序列的傅立叶变换。可以利用 $X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$ 。

2 Z 变换和 DTFT 之间的关系(重点)

DTFT 为单位圆上的 z 变换。数学表达为: $X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$ ----- 记住并理解!

3. 序列特性与 X(z)的收敛域 ROC 的关系。(重点)

也只有 Z 变换的收敛区域确定之后, 才能由 Z 变换唯一地确定序列。

一般来说, 序列的 Z 变换的收敛域在 Z 平面上的一环状区域: $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

总结: a. ROC 不包含任何极点。

b. 有理 z 变换的收敛域 ROC 由其极点界定。

c. 对于有限长序列 $x[n]$, 其 z 变换的收敛域 ROC 为整个 z -平面, 可能在 $z = 0$ 或 $z = \infty$ 除外。只有序列为 $\delta(n)$ 时, 收敛域是整个 z 平面。

d. 对于右边序列 $x[n]$, 其 z 变换的收敛域 ROC 由其离原点最远的极点确定, 其形式为 $|z| > |R_{x-}|$ 。

e. 对于左边序列 $x[n]$, 其 z 变换的收敛域 ROC 由其离原点最近的极点确定, 其形式为 $|z| < |R_{x+}|$ 。

f. 对于双边序列 $x[n]$, 其 z 变换的收敛域 ROC 环状收敛域, 其形式为公共收敛域 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ 。

4. z 反变换(重点)

常用序列的 z 变换(重点--记住!!):

$$Z[\delta(n)] = 1, |z| \geq 0$$

$$Z[u(n)] = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$Z[a^n u(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

$$Z[b^n u(-n-1)] = \frac{1}{1-bz^{-1}}, |z| < |b|$$

逆变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad C: \text{收敛域内绕原点逆时针的一条闭合曲线}$$

留数定理: $x(n) = \sum [X(z) z^{n-1} \text{在} C \text{内极点留数之和}]$

留数辅助定理: $x(n) = -\sum [X(z) z^{n-1} \text{在} C \text{外极点留数之和}]$

利用部分分式展开: $X(z) = \sum \frac{A_k}{1-a_k z^{-1}}$, 然后利用定义域及常用序列的 z 变换求解。(重点)

基本要求: 用部分分式展开法求 z 反变换。(重点)

例: 假设 $X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-0.3z^{-1}}$, 收敛域 ROC 为 $0.3 < |z| < 0.5$, 则 $X(z)$ 的 z 反变换

为 $-(0.5)^n u(-n-1) + (0.3)^n u(n)$ 。(重点)

说明: 本题要求掌握序列的时域特性域 z 变换收敛域之间的对应关系。具体说, 有限长序列的 z 变换的 ROC 是怎样的, 右边序列的 z 变换的 ROC 是怎样的, 因果序列的 z 变换的 ROC 是怎样的, 左边序列的 z 变换的 ROC 是怎样的, 反因果序列的 z 变换的 ROC 是怎样的。

典型序列的 z 变换表达式是否记住了？

$$-\alpha^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| < |\alpha|$$

$$\beta^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| > |\beta|$$

这两个典型 z 变换对，对求 z 变换或逆 z 变换非常重要。

例：已知 $X(z) = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-2}$ ，试求与 $X(z)$ 对应的所有可能的序列 $x(n)$ 。（重点）

解：同一个 z 变换函数，收敛域不同，对应的序列也不同。本题没有给定收敛域，所以必须先确定收敛域。

$X(z)$ 有两个极点： $z_1 = 0.5$ ， $z_2 = 2$ ，因为收敛域总是以极点为边界，所以收敛域有以下三种情况： $|z| < 0.5$ ， $0.5 < |z| < 2$ ， $|z| > 2$ ，三种收敛域对应三种不同的原序列，分别讨论如下：

$$(1) \quad |z| < 0.5 \quad \text{对应左边序列} \quad \therefore x(n) = -0.5^n u(-n-1) - 2^n u(-n-1)$$

$$(2) \quad 0.5 < |z| < 2 \quad \text{对应双边序列} \quad \therefore x(n) = 0.5^n u(n) - 2^n u(-n-1)$$

$$(3) \quad |z| > 2 \quad \text{对应右边序列} \quad \therefore x(n) = 0.5^n u(n) + 2^n u(n)$$

例：设 $X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})} \quad |z| > 2$ ，用部分分式展开法求逆 z 变换。（重点）

解：先去掉 z 的负幂次，以便于求解，将 $X(z)$ 的分子分母同乘以 z^2 ，得：

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

将等式两端同时除以 z ，得：

$$A_1 = \text{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, 2\right] = (z-2) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = (z-2) \frac{z}{(z-2)(z-0.5)} \Big|_{z=2} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \text{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, 0.5\right] = (z-0.5) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0.5} = (z-0.5) \frac{z}{(z-2)(z-0.5)} \Big|_{z=0.5} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{因而得：} \quad X(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{z}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-0.5}$$

由收敛域知， $x(n)$ 为右边序列，得：

$$x(n) = \frac{4}{3} \cdot 2^n u(n) - \frac{1}{3} \cdot 0.5^n u(n)$$

主要应用于单阶极点的序列。

5 Z 变换的性质

① 线性性质(重点) $M(z)ZT[m(n)] = aX(z) + bY(z) \quad R_{m-} < |z| < R_{m+}$

② 序列的移位性质(重点)

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$ZT[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

③ 序列乘以指数序列的性质(重点)

$$y(n) = a^n x(n) \quad a \text{ 为常数}$$

$$Y(z) = ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z) \quad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

④ 序列乘以 n 的 ZT $X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$ZT[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

⑤ 复共轭序列的 ZT $X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$ZT[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

⑥ 初值定理 $X(z) = ZT[x(n)]$

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

⑦ 终值定理 $\lim_{z \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

⑧ 时域卷积定理(重点)

$$\text{设 } \omega(n) = x(n) * y(n)$$

$$\text{则 } W(z) = ZT[\omega(n)] = X(z)Y(z) \quad R_{w-} < |z| < R_{w+}$$

⑨ 复卷积定理 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$ZT[y(n)] = Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$\omega(n) = x(n)y(n) \quad W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} \quad R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

⑩ 帕斯维尔定理 $ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$ZT[y(n)] = Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+} \quad R_{x-} R_{y-} < 1, \quad R_{x+} R_{y+} > 1$

那么 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$

2.4 离散时间系统的系统函数及频率响应

2 系统函数与差分方程的关系

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x(n-k)$ (给定差分方程, 能计算其系统函数, 或给定系统函数, 能计算得到

差分方程。) (重点)

3 频率响应 (重点)

频率响应是一个重要的概念, 根据频率响应, 可理解滤波。

频率响应定义为系统单位冲激响应的 DTFT:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (\text{重点})$$

系统的频率响应是以 2π 为周期的 ω 的连续函数, 这一点和连续系统的频率响应是不同的。若 $h(n)$ 为实数, 则系统的幅度响应在 $0 \leq \omega \leq 2\pi$ 区间内是偶对称的, 而相位响应是奇对称的。

注意: 仅当稳定系统才有频率响应。频率响应 $H(e^{j\omega})$ 可根据 DTFT 与 z 变换之间的关系简单得到:

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

稳态响应的求解

结论:

对于 LTI 系统, 如果输入为正弦序列 $x(n)=\cos(\omega_0 n+\varphi_0)$, 则输出响应 $y(n)$ 必为相同形式的正弦序列, 但需在 $\omega=\omega_0$ 的幅频响应 $|H(e^{j\omega})|$ 进行加权, 并通过相频响应 $\angle H(e^{j\omega})$ 在 $\omega=\omega_0$ 的值进行移位,

即: $y[n] = |H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \varphi_0 + \angle H(e^{j\omega_0}))$

例: 假设实序列 $x[n]$ 的 DTFT 记为 $X(e^{j\omega})$, 则其幅值 $|X(e^{j\omega})|$ 是关于 ω 的 (偶函数)。

说明: 还记得反复强调的一句话, 实序列的 DTFT 的幅度、实部是关于频率 ω 偶函数, 而相位和虚部则是关于频率 ω 奇函数。

例：对于一 LTI 离散时间系统其频率响应 $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$ ，如果系统输入 $x(n) = \cos(\frac{\pi}{3}n)$ ，响应的稳态输出响应 $y(n) = (1.15\cos(\frac{\pi}{3}n - 0.52))$ 。

说明：将系统的频率响应写成幅度相位表达式： $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}$ ，则输出信号为：

$$y[n] = |H(e^{j\frac{\pi}{3}})| \cos(\frac{\pi}{3}n + \angle H(e^{j\frac{\pi}{3}}))$$

4 用系统函数极点分布分析系统的因果性和稳定性（重点）

系统函数： $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}$ （传输函数 $H(z)$ 为系统的单位冲激响应 $h(n)$ 的 Z 变换。）

1) 稳定系统：有界的输入产生的输出也有界的系统

线性移不变系统是稳定系统的充要条件： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

或：其系统函数 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆 $|z|=1$ （牢记此结论！）

2) 因果系统： n_0 时刻的输出 $y(n_0)$ 只由 n_0 时刻之前的输入 $x(n), n \leq n_0$ 决定

线性移不变系统是因果系统的充要条件： $h(n) = 0, n < 0$

或：其系统函数 $H(z)$ 的收敛域在某圆外部：即： $|z| > R_x$ （牢记此结论！）

3) 稳定因果系统：同时满足上述两个条件的系统。

线性移不变系统是因果稳定系统的充要条件： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, h(n) = 0, n < 0$

或： $H(z)$ 的极点在单位圆内 $H(z)$ 的收敛域满足： $|z| > R_{x-}, R_{x-} < 1$ （牢记此结论！）

例：一因果 LTI 离散时间系统的传输函数 $H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$ ，则系统的单位冲激响应为(0.5ⁿu(n))。

说明：根据传递函数求系统的单位冲激响应，其实就是将传递函数进行逆 z 变换，但要注意系统的因果性如何。

例：因果 IIR 离散时间 LTI 系统，其传输函数 $H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$ ，则系统(稳定)。

例：一 FIR 离散时间 LTI 系统总是(稳定)。

说明：系统的稳定性如何判断？按照教材中的说法，就是系统传递函数的收敛域如果包括“单位圆”，则系统是稳定的。对于因果系统来说，其单位冲激响应为因果序列，故其 z 变换的 ROC 一定是某圆外部的整个区域。而这个圆就位于离原点最近的极点上，所以，对于因果系统，如果系统传递函

数的全部极点都位于单位圆以内的话，则系统是稳定的。

对于 FIR 系统，其单位冲激响应是一个有限长序列，其 z 变换的 ROC 为除了无穷远和原点之外的整个 z 平面，自然包括单位圆，所以 FIR 系统始终是稳定的。

5 系统的频率特性可由系统函数零点及极点确定

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - z_k z^{-1})} = A \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i) z^{-M}}{\prod_{k=1}^N (z - z_k) z^{-N}}$$

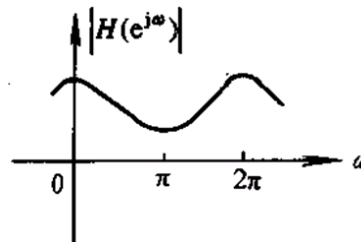
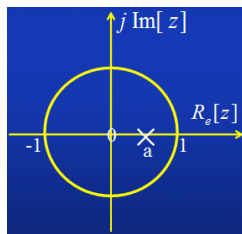
（式中， z_k 是极点， z_i 是零点；在极点处，序列 $x(n)$ 的 Z 变换是不收敛的，因此收敛区域内不应包括极点。）

系统函数 $H(z)$ 的极点位置主要影响频响的峰值位置及尖锐程度，零点位置主要影响频响的谷点位置及形状。

例：设一阶系统的差分方程为 $y(n) = x(n) + ay(n-1)$ ， $0 < a < 1$ ，用几何法分析其幅频特性。（重点）

解：对差分方程两边取 Z 变换，得： $Y(z) = X(z) + az^{-1}Y(z)$

系统函数为： $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$ $|z| > a$ ，极点为 $z = a$ ，零点为 $z = 0$ ，如下图所示：

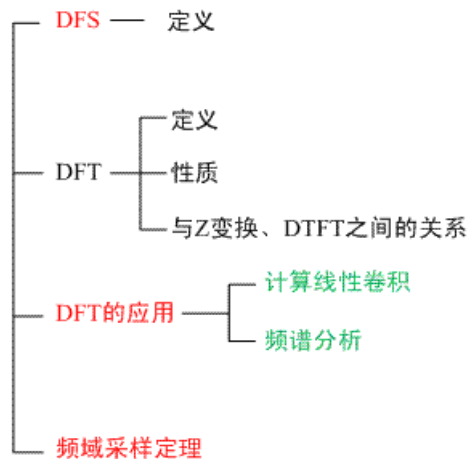


当 $\omega = 0$ 时，由于极点矢量长度最短，幅频特性出现峰值，随着 ω 的增加，幅度逐渐减小，当 $\omega = \pi$ 时，由于极点矢量长度最长，幅频特性出现谷值，随着 ω 的增加，幅度逐渐增大，直到 $\omega = 2\pi$ 时，幅频特性出现峰值，如上图右所示。

简答题：（重点）

1. 说明有限长序列、左边序列、右边序列、双边序列的概念和收敛域各是什么？
2. 说明系统频率响应的概念？系统的频率响应和系统函数是什么关系？（单位圆上（ $z = e^{j\omega}$ ）的系统函数就是系统的频率响应）
3. 说明 FIR 系统为什么始终是稳定的？
4. 怎样在 z 域表示离散时间 LTI 系统？答案：传输函数 $H(z)$ 表示离散时间 LTI 系统。

第三章：DFT 是为适应计算机分析傅里叶变换规定的一种专门运算，本章是数字信号处理课程的重点章节。



前言

1. 连续周期信号 —— 傅里叶级数 (FS)

连续周期信号 $\tilde{x}(t)$ 可展开成傅里叶级数：

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} \quad (*)$$

式中， $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ， T_0 为 $\tilde{x}(t)$ 的周期。

傅里叶级数的系数为：

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

幅度频谱是指各次谐波的振幅随频率的变化关系，即：

$$|c_n| \sim \Omega(n\Omega_0)$$

连续^{时域}时间、周期 $\leftrightarrow$ 非周期、离散^{频域}频率

2. 连续非周期信号 —— 傅里叶变换 (FT)

连续非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为：

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

因为非周期可视为 $T_0 \rightarrow \infty$ ，则离散频谱间距 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow 0$ ，则 $X(j\Omega)$ 变成 Ω 的连续函数。

连续时间、非周期 $\leftrightarrow$ 非周期、连续频率

3. 离散非周期信号 —— 序列的傅里叶变换 (DTFT)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

如果把序列看成连续时间信号的采样，采样间隔为 T ，则数字频率 ω 和模拟角频率 Ω 的关系为 $\omega = \Omega T$ ，且 $x(n) = x(nT)$ ，代入上式，得：

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T}$$

离散时间、非周期 $\leftrightarrow$ 周期、连续频率

4. 离散周期信号 —— 离散傅里叶级数 (DFS)

设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列，即：
$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+rN) \quad r \text{ 为任意整数}$$

表 3.1 四种傅里叶变换形式的归纳

	时间函数	对应关系	频率函数
1	连续 非周期		连续 非周期
2	连续 周期		离散 非周期
3	离散 非周期		连续 周期
4	离散 周期		离散 周期

3.1 离散傅里叶级数

1. 周期序列的离散傅里叶级数 (DFS)

说明：离散傅里叶级数系数，用 DFS(Discrete Fourier Series)表示。

连续时间周期信号可以用傅里叶级数表示，离散周期序列也可以表示成傅里叶级数形式。

周期为 N 的复指数序列的基频序列为
$$e_1(n) = e^{j\omega_0 n} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$$

k 次谐波序列为
$$e_k(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$$

由于 $e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+rN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ ，即 $e_{k+rN}(n) = e_k(n)$ ，因而，离散傅里叶级数的所有谐波成分中只有 N 个是独立的。因此在展开成离散傅里叶级数时，我们只能取 N 个独立的谐波分量，通常取 $k=0$ 到 $(N-1)$ ，即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (*)$$

式中， $1/N$ 是习惯上采用的常数， $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数。利用

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

将 (*) 式两端同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ ，并对一个周期求和

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} \right] = \tilde{X}(r)$$

即

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

由于

$$\tilde{X}(k + rN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+rN)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{X}(k)$$

所以 $\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列。因此，时域离散周期序列的离散傅里叶级数在频域上仍然是一个周期序列。称为离散傅里叶级数系数，用 DFS(Discrete Fourier Series) 表示。

令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ，则

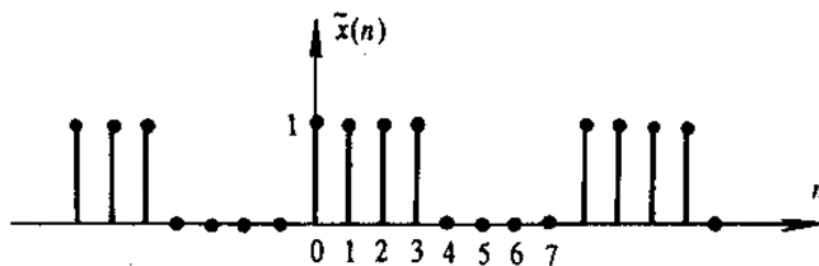
$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

其中，符号 DFS[.] 表示离散傅里叶级数正变换，IDFS[.] 表示离散傅里叶级数反变换。

例：设 $x(n) = R_4(n)$ ，将 $x(n)$ 以 $N=8$ 为周期进行周期延拓，得到周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，求 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS。

解：



$$\begin{aligned}
\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^7 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} \\
&= \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{4}kn} \\
&= \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k \cdot 4}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} \\
&= \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} \\
&= \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} (e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{8}k} (e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k})} \\
&= e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{8}k}
\end{aligned}$$

其幅度特性为：



2. 周期序列的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[\tilde{x}(n)] = DTFT\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right]$$

思路：由

$$1 \leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi r)$$

利用 和 DTFT 的频移特性，可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r)$$

3.2 有限长序列的离散傅立叶变换(DFT)

说明：(Discrete Fourier Transform, DFT 离散傅里叶变换)

1 定义(重点)

$$X(k) = DFT[x(n)] = \{DFS[x(<n>_N)]\}R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \text{----- (记住!!)}$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \{IDFS[X(<k>_N)]\}R_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \text{-----}$$

记住!

其中, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

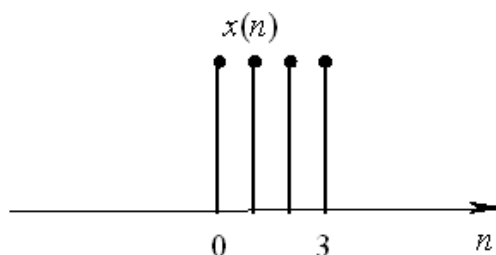
应当注意, 虽然 $x(n)$ 和 $X(k)$ 都是长度为 N 得有限长序列, 但他们分别是由周期序列 $x_p(n)$ 和

$X_p(k)$ 截取其主周期得到的, 周期为 N 的周期序列 $x_p(n)$ 可以看成长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 周期延拓的结果。本质上是做 DFS 或 IDFS, 所以不能忘记它们的隐含周期性。尤其是涉及其位移特性时更要注意。(重点)

DFT 的隐含周期性: $W_N^k = W_N^{k+mN}$ k, m 为整数, N 为自然数 (重点)

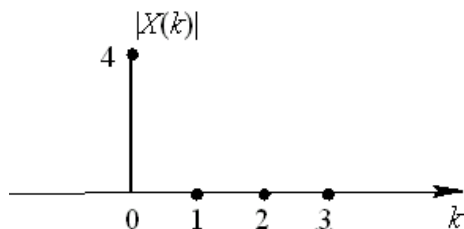
例: 设 $x(n) = R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 4 点 DFT。(重点)

解:

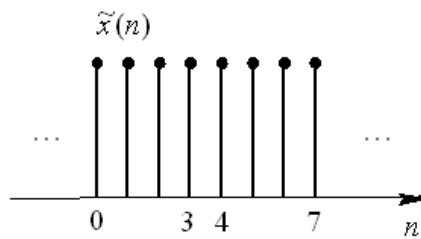


$x(n)$ 的 4 点离散傅里叶变换为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = e^{-j\frac{3}{4}\pi k} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\frac{\pi}{4}k)} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

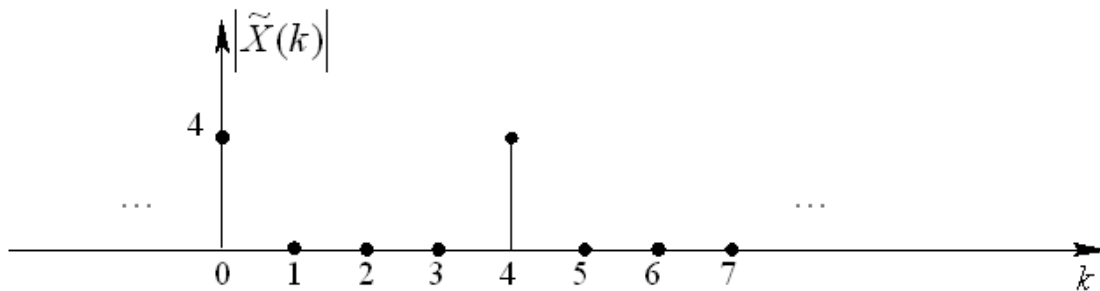


以 $N=4$ 为周期将 $x(n)$ 延拓成周期序列, 得 $\tilde{x}(n)$:

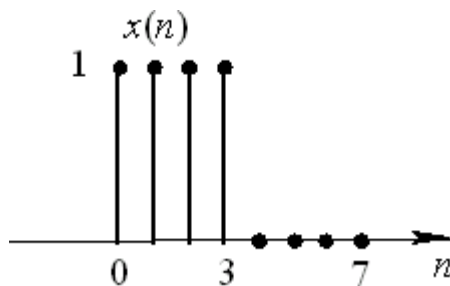


$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = e^{-j\frac{3}{4}\pi k} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\frac{\pi}{4}k)}$$

其离散傅里叶级数为:

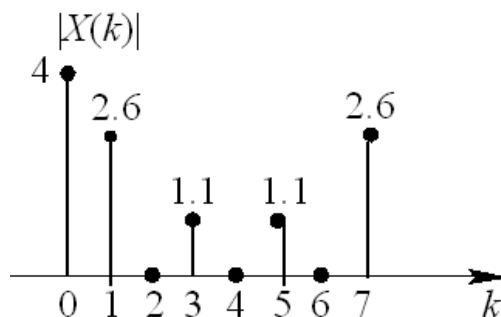


例: 设 $x(n) = R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 8 点 DFT。(重点)
解:

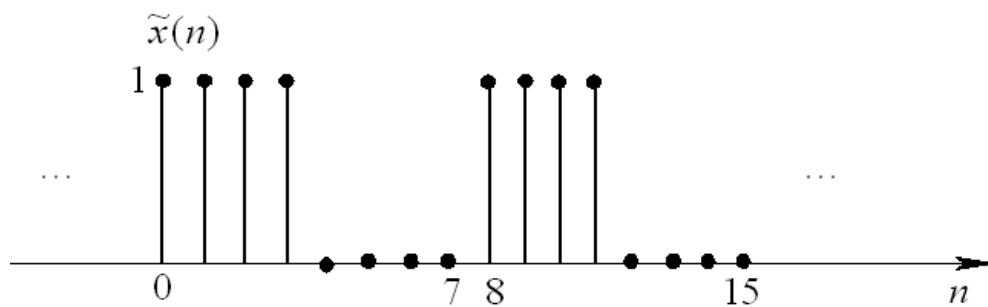


$x(n)$ 的 8 点离散傅里叶变换为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

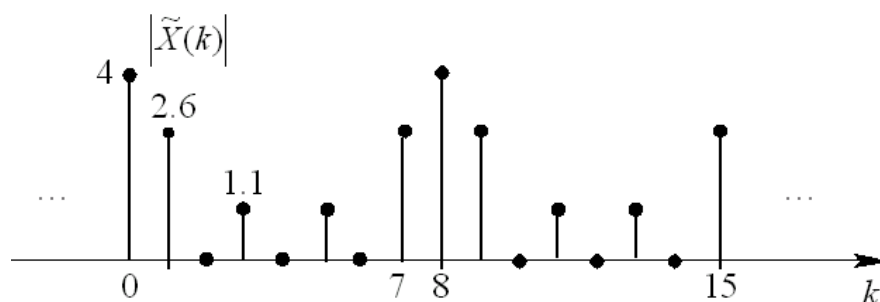


以 $N=8$ 为周期将 $x(n)$ 延拓成周期序列, 得 $\tilde{x}(n)$:



其离散傅里叶级数为：

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)}$$



由例可见，离散傅里叶变换的结果与变换区间长度 N 的取值有关。

2 离散傅立叶变换与 DTFT、Z 变换的关系(重点)

$$X(k) = X(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

DFT 的物理意义： $X(k)$ 为 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的等间隔采样。 $X(k)$ 为 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上的 N 点等间隔采样。

3 时域分析

记住结论：时域抽样对应频域的周期拓展，频率抽样对应时域的以周期 N 的周期拓展。

这可以表述为如下公式：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)$$

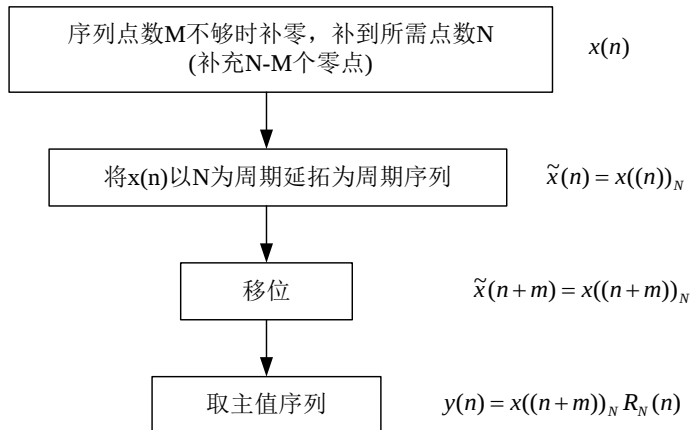
3.3 离散傅里叶变换的基本性质

2 循环移位性质

设 $x(n)$ 是长度为 M 的有限长序列，则 $x(n)$ 的 N 点循环移位定义为 ($N \geq M$):

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

循环移位的实现步骤:



3 循环卷积定理（重点）

1) 设序列 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的长度分别为 N 和 M 。 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 L 点循环卷积定义为

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

式中， L 称为循环卷积区间长度， $L \geq \max [N, M]$ 。

2) 循环卷积矩阵

$$\begin{bmatrix} y(0)_c \\ y(1)_c \\ y(2)_c \\ \vdots \\ y(L-1)_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}$$

特点:

(1) 第 1 行是序列 $\{x(0), x(1), \dots, x(L-1)\}$ 的循环倒相序列。注意，如果 $x(n)$ 的长度 $M < L$ ，则需要要在 $x(n)$ 末尾补 $L-M$ 个零后，再形成第一行的循环倒相序列。

(2) 第 1 行以后的各行均是前一行向右循环移 1 位形成的。

(3) 矩阵的各主对角线上的序列值均相等。

循环卷积和线性卷积的区别

线性卷积：翻折—>乘加—>移位： $y(n) = x(n) * h(n) = \sum h(k) x(n-k)$

循环卷积：补零—>周期延拓—>翻折—>循环移位—>对应值相加

例：计算下面给出的两个长度为 4 的序列 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 4 点和 8 点循环卷积。（重点）

$$h(n) = \{h(0), h(1), h(2), h(3)\} = \{1, 1, 1, 1\}$$

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3)\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

解：按照循环卷积矩阵写出 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 4 点循环卷积矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(4) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$h(n)$ 与 $x(n)$ 的 8 点循环卷积矩阵形式为

【补充】①计算 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积？②哪一种情况下计算的循环卷积结果就等于线性卷积？

【说明】当循环卷积区间长度 L 大于等于 $y(n) = h(n)*x(n)$ 的长度时，循环卷积结果就等于线性卷积。假设 $h(n)$ 和 $x(n)$ 都是有限长序列，长度分别是 N 和 M 。循环卷积等于线性卷积的条件是 $L \geq N + M - 1$ 。（重点）

3) 时域循环卷积定理

设 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的长度分别为 N 和 M ，其 L 点循环卷积为

$$y_c(n) = h(n) \circledast x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

$$\begin{aligned} H(k) &= DFT[h(n)]_L \\ X(k) &= DFT[x(n)]_L \end{aligned} \quad 0 \leq k \leq L-1$$

则由 DFT 的循环卷积定理有

$$Y_c(k) = DFT[y_c(n)]_L = H(k)X(k) \quad 0 \leq k \leq L-1$$

4 复共轭序列的 DFT

性质：设 $x^*(n)$ 是 $x(n)$ 的复共轭序列，长度为 N ， $X(k) = DFT[x(n)]_N$ ，

$$\text{则 } DFT[x^*(k)]_N = X^*(N-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

例：给定一 16-点实序列 $x(n)$ ，其 16-点 DFT 记为 $X(k)$ ，已知 $X(13) = 2 + j3$ ，则 $X^*(3) = (\underline{2 + j3})$ 。

说明：DFT 的性质。实序列的 DFT 的共轭对称性： $X(k) = X^*(N-k)$ ，或 $X(N-k) = X^*(k)$ 。

5 DFT 的共轭对称性（重点）

可总结出 DFT 的共轭对称性质：如果序列 $x(n)$ 的 DFT 为 $X(k)$ ，则 $x(n)$ 的实部和虚部（包括 j ）的 DFT 分别为 $X(k)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量；而 $x(n)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量的 DFT 分别为 $X(k)$ 的实部和虚部乘以 j 。

3.4 频域采样定理

离散傅里叶变换相当于信号傅里叶变换的等间隔采样，也就是说实现了频域的采样，便于计算机计算。那么是否任一序列都能用频域采样的方法去逼近呢？这是一个很吸引人的问题。

我们考虑一个任意的绝对可和的序列 $x(n)$ ，它的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

如果对 $X(z)$ 单位圆上进行等距离采样

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{nk}$$

现在要问，这样采样以后，信息有没有损失？或者说，采样后所获得的有限长序列 $x_N(n)$ 能不能代表原序列 $x(n)$ 。

$$x_N(n) = IDFT[X(k)]$$

为了弄清这个问题，我们从周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 开始

$$\begin{aligned}\tilde{x}_N(n) &= IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)W_N^{mk} \right] W_N^{-nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} W_N^{(m-n)k} \right]\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, r \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其它 } m \end{cases}$$

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)$$

也即 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的周期延拓序列，其时域周期为频域采样点数 N 。在第一章我们看到，时域的采样造成频域的周期延拓，这里又对称的看到，频域采样同样造成时域的周期延拓。因此，如果序列 $x(n)$ 不是有限长的，则时域周期延拓时，必然造成混叠现象，因而一定会产生误差。对于长度为 M 的有限长序列，只有当频域采样点数 N 大于或等于序列长度 M 时，才有

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) R_N(n) = x(n)$$

即可由频域采样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$ ，否则产生时域混叠现象，这就是所谓的频域采样定理。
(重点)

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

内插公式:

3.5 DFT 的应用举例

1.用 DFT 计算线性卷积(重点)

用循环（周期）卷积计算有限长序列的线性卷积(重点)

对周期要求: $N \geq N_1 + N_2 - 1$ (N_1 、 N_2 分别为两个序列的长度) (记住!!)

2.用 DFT 进行谱分析的误差问题(重点)

(1) 混叠现象

利用 DFT 逼近连续时间信号的傅里叶变换，为避免混叠失真，按照抽样定理的要求，采样频率至少是信号最高频率的两倍。

解决混叠问题的唯一方法是保证采样频率足够高。

(2) 截断效应

任何带限信号都是非时限的，任何时限信号都是非带限的。实际问题中遇到的离散时间序列可能是非时限的、无限长序列，在对该序列利用 DFT 进行处理时，由于作 DFT 的点数总是有限的，因此就有一个必须将该序列截断的问题。序列截断的过程相当于给该序列乘上一个矩形窗口函数 $R_N(n)$ 。

如果原来序列的频谱为 $X(e^{j\omega})$ ，矩形窗函数的频谱为 $W_R(e^{j\omega})$ ，则截断后有限长序列的频谱为

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$$

截断后序列的频谱与原序列频谱必然有差别，这种差别对谱分析的影响主要表现在如下两个方面：

①**频谱泄露**：由于矩形窗函数频谱的引入，使卷积后的频谱被展宽了，即 $X(e^{j\omega})$ 的频谱“泄露”到其它频率处，称为频谱泄露。

在进行 DFT 时，由于取无限个数据是不可能的，所以序列的时域截断是必然的，泄露是难以避免的。为了尽量减少泄露的影响，截断时要根据具体的情况，选择适当形状的窗函数，如汉宁窗或汉明窗等。

②**谱间干扰**。在主谱线两边形成很多旁瓣，引起不同频率分量间的干扰(简称**谱间干扰**)，特别是强信号谱的旁瓣可能湮没弱信号的主谱线，或者把强信号谱的旁瓣误认为是另一频率的信号的谱线，从而造成假信号，这样就会使谱分析产生较大偏差。

(3) 栅栏效应

由于 DFT 是有限长序列的频谱等间隔采样所得到的样本值，这就相当于透过一个栅栏去观察原来信号的频谱，因此必然有一些地方被栅栏所遮挡，这些被遮挡的部分就是未被采样到的部分，这种现象称为栅栏效应。由于栅栏效应总是存在的，因而可能会使信号频率中某些较大的频率分量由于被“遮挡”而无法得到反映。此时，通常在有限长序列的尾部增补若干个零值，借以改变原序列的长

度。这样对加长的序列作 DFT 时, 由于点数增加就相当于调整了原来栅栏的间隙, 可以使原来得不到反映的那些较大的频率分量落在采样点上而得到反映。

产生原因说明: 由傅里叶变换理论知道, 若信号持续时间有限长, 则其频谱无限宽; 若信号的频谱有限宽, 则其持续时间必然为无限长。(重点)

如果用 DFT 分析连续信号的频谱, 在对连续信号采样时, 无法满足采样定理, 那么就会出现**频谱混叠**现象。解决混叠问题的唯一方法是保证采样频率足够高。当连续信号无限长或很长时, 在对连续信号采样时, 采样点数太多以致无法存储和计算, 需要将信号**截断**, 这样将导致**频谱的泄漏现象**。为了尽量减少泄露的影响, 截断时要根据具体的情况, 选择适当形状的窗函数, 如汉宁窗或汉明窗等。用 DFT 计算连续信号的频谱只能得到采样点上的频谱, 而不能看到整个频谱, 这种现象称为**栅栏效应**。可以通过增加点数, 因为点数增加就相当于调整了原来栅栏的间隙, 可以使原来得不到反映的那些较大的频率分量落在采样点上而得到反映。

3.用 DFT 进行谱分析的参数选择问题(重点)

对模拟信号频谱的采样间隔, 称之为频率**分辨率**。

(1) 在已知信号的最高频率 f_c (即谱分析范围)时, 为了避免频率混叠现象, 要求采样频率 F_s 满足: $F_s > 2f_c$ 。

(2) 采样频率 F_s , 采样点数 N , 谱分辨率 $F = F_s/N$, 如果保持采样点数 N 不变, 要提高频谱分辨率(减小 F), 就必须降低**采样频率**, 采样频率的降低会引起谱分析范围**变窄**和频谱**混叠失真**。如维持 F_s 不变, 为提高频率分辨率可以增加**采样点数 N** 。因为 $NT = T_p$, $T = F_s^{-1}$, 只有增加对信号的观察时间 T_p , 才能增加 N 。

(3) **采样点数 $N > 2f_c/F$**

(4) **最小记录时间 $T_p \geq 1/F$**

例: 用 DFT 对实信号进行谱分析, 要求频率分辨率 $F \leq 50\text{Hz}$, 信号最高频率为 $f_{\max} = 1000\text{Hz}$, 试确定以下参数: (1) 最小记录时间; (2) 最大取样间隔; (3) 最少采样点数; (4) 若要求频率分辨率提高一倍, 求最少采样点数。(重点)

解 (1)
$$T_{p\min} = \frac{1}{F_{\max}} = 0.02\text{s}$$

(2)
$$T_{\max} = \frac{1}{2f_{\max}} = 0.5\text{ms}$$

(3)
$$N_{\min} = \frac{2f_{\max}}{F_{\max}} = \frac{T_{p\min}}{T_{\max}} = 40$$

(4)
$$N_{\min} = \frac{2f_{\max}}{F_{\max}} = \frac{2000}{25} = 80$$

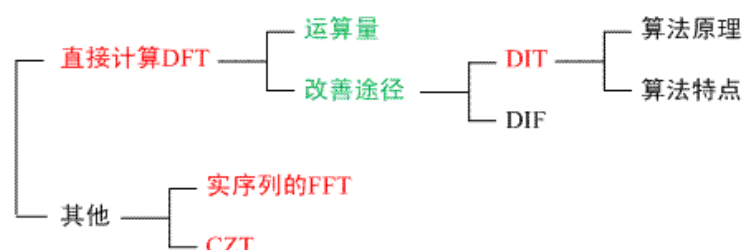
简答题: (重点)

1. 一个序列的 DFT 与序列的傅里叶变换之间的关系是什么?
2. 序列的 DTFT 和序列的 z 变换间的关系是什么? 序列的 DFT 和序列的 Z 变换间的关系是什么?
3. 有限长序列 $x(n)$ 的长度为 M , 对其进行频域采样, 不失真的条件是什么? 两个有限长序列

$x_1(n), 0 \leq n \leq M$, $x_2(n), 0 \leq n \leq N$, 对它们进行线性卷积, 结果用 $y(n)$ 表示, $y(n)$ 的长

- 度是多少？如果进行循环卷积，那么什么时候线性卷积和循环卷积的结果相等？
4. 用 DFT 进行谱分析带来哪些误差问题？采取什么措施可以减少这些误差？
 5. 时域采样定理的要点是什么？频域采样定理的要点是什么？

第四章：快速傅里叶变换并不是一种新的变换，它是离散傅里叶变换的一种快速算法。



4.1 直接计算 DFT 的问题及改进的途径

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

直接计算 DFT，需要 N^2 次复数乘法， $N(N-1)$ 次复数加法。

我们可以利用系数 W_N^{nk} 的特性来改善离散傅里叶变换的计算效率。

(1) W_N^{nk} 的对称性 $W_N^{nk+N/2} = -W_N^{nk}$

(2) W_N^{nk} 的周期性 $W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{(k+N)n}$

利用 W_N^{nk} 的对称性和周期性，将大点数的 DFT 分解成若干个小点数的 DFT，FFT 正是基于这个基本思路发展起来的。(重点)

说明：快速傅里叶变换 FFT(Fast Fourier Transform)

分类：按时间抽取（DIT）算法和按频率抽取（DIF）算法。

4.2 基 2FFT 的算法原理和 FFT 运算特点

1) 数据要求: $N = 2^M$

2) 计算效率 (乘法运算次数: $\frac{1}{2}NM$, 加法计算次数: NM) (复数运算)

(DFT 运算: 乘法运算次数: N^2 , 加法计算次数: N^2) (复数运算)

对于算法原理, 要求能够看懂分解流程图。

1 时域抽取法如下: (Decimation In Time, DIT - FFT)

设序列 $x(n)$ 长度为 N , 且满足 $N=2^M$, M 为正整数。按 n 的奇偶把 $x(n)$ 分解为两个 $N/2$ 点的子序列:

$$x(2r) = x_1(r) \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$x(2r+1) = x_2(r) \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

则 $x(n)$ 的 DFT 为

$$\begin{aligned} X(k) &= DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)W_N^{2rk} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \end{aligned}$$

所以 $X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$

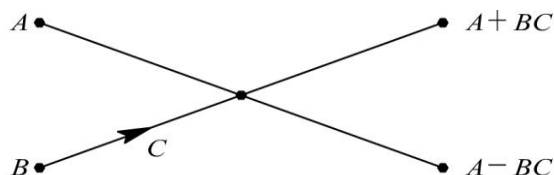
$$\begin{cases} X_1(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} = DFT[x_1(r)]_{N/2} \\ X_2(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk} = DFT[x_2(r)]_{N/2} \end{cases}$$

将 $X(k)$ 又可以写为

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

上式将 N 点 DFT 分解为两个 $N/2$ 点的 DFT 运算，运算过程如下图所示



利用蝶形运算求解。

运算量：由按时间抽取的 FFT 流图可见：

每级都由 $N/2$ 个蝶形单元构成，因此每级都需要 $N/2$ 次复数乘法和 N 次复数加法。这样， M 级运算共需要：

复数乘法： $m_F = \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \log_2 N$

复数加法： $a_F = N \cdot M = N \log_2 N$

而直接计算 DFT 需要：

复数乘法： N^2

复数加法： $N(N-1)$

以乘法为例，对 FFT 算法与直接 DFT 算法的运算量进行比较：

N	N^2	$\frac{N}{2} \log_2 N$	$N^2 / (\frac{N}{2} \log_2 N)$
8	64	12	5.4
128	16384	448	36.6
1024	1048576	5120	204.8

可以看出：当 N 越大时，FFT 算法的优越性越突出。

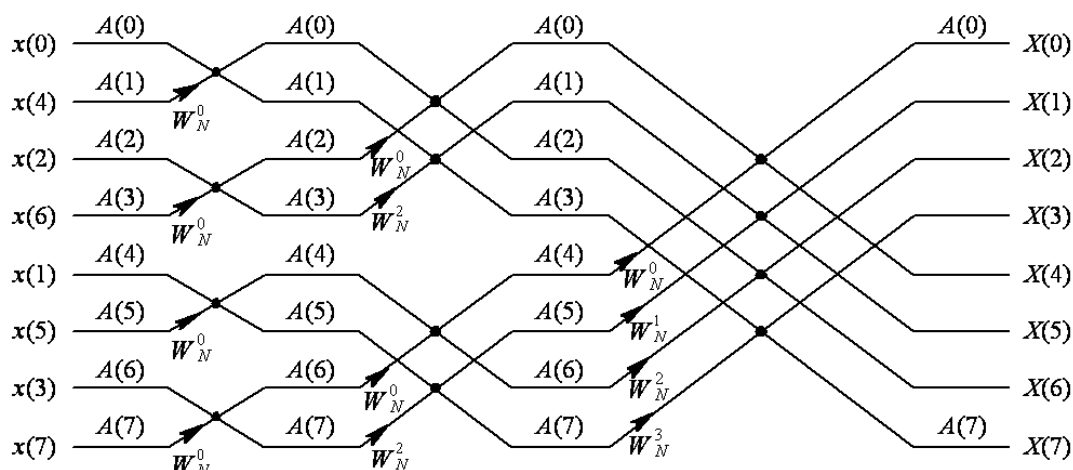
DIT-FFT 算法与 DFT 运算量的比较

直接计算 DFT 与 FFT 算法的计算量之比为

$$\frac{\frac{N^2}{\frac{N}{2} \log_2 N}}{\frac{2N}{\log_2 N}} = \frac{2N}{\log_2 N} \quad N \text{ 越大, FFT 的优点越为明显}$$

说明：掌握给定点数的基 2 DIT-FFT 蝶形图

8 点 DFT 的完整 FFT 流图：



2 频域抽样法 (Decimation In Frequency, DIF - FFT)

将长度为 $N=2^M$ 的序列 $x(n)$ 前后对半分, 其 N 点 DFT 可表示为

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\left(n + \frac{N}{2}\right)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{Nk/2} \right] W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

按 k 的奇偶可将 $X(k)$ 分为两部分

k 取偶数时

$$\begin{aligned}
 X(2r) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2nr} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nr}
 \end{aligned}$$

k 取奇数时

$$\begin{aligned}
 X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{n(2r+1)} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \right\} W_{N/2}^{nr}
 \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{cases} \quad \text{得到} \begin{cases} X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^r \\ X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^r \end{cases}$$

注: DIT-FFT 与 DIF-FFT 特点比较(重点)

相同之处:

- (1) DIF 与 DIT 两种算法均为原位运算
- (2) DIF 与 DIT 运算量相同

所以, DIF 与 DIT 是两种等价的 FFT 算法。

不同之处:

- (1) DIF 与 DIT 两种算法结构倒过来

DIF 的输入序列为自然顺序, 输出为倒序排列, 与 DIT 的正好相反。

- (2) 蝶形结构不同

DIF 的复数乘法只出现在减法之后, DIT 则是先作复数乘法后作加减法。

简答题: (重点)

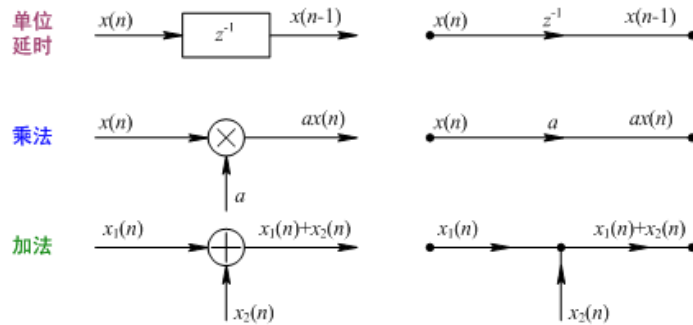
1. 比较 DIT—FFT 与 DIF—FFT 特点。
2. 为什么要进行 FFT 变换? FFT 变换的基本思想是什么? 说明基-2FFT 分成哪两种算法。说出它们的英文名称和中文含义。

(DFT 的计算在数字信号处理中非常有用, 但是由于 DFT 的计算量较大, 即使采用计算机也很难对问题进行实时处理, 通过引入其快速算法 FFT, 使 DFT 的计算大大简化, 运算时间一般可缩短一、二个数量级。基本思路: DFT 的运算量与 N^2 成正比; 如果一个大点数 N 的 DFT 能分解为若干小点数 DFT 的组合, 则显然可以达到减小运算量的效果。根据把长序列分解为短序列的分解形式不同, 基-2FFT 算法基本上可以分为两大类: 按时间抽取法—decimation in time, DIT; 按频率抽取法—decimation in frequency, DIF))

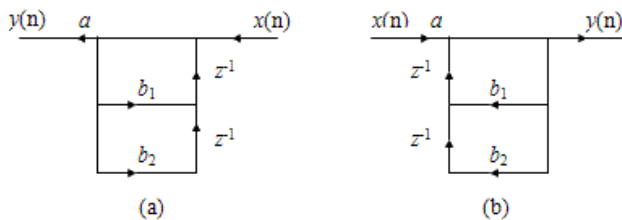
第五章: 本章主要掌握 IIR 和 FIR 两种滤波器的基本网络结构。



5.1 基本单元结构



转置定理 如果将流图中所有支路方向都颠倒或反向，并交换输入 $x(n]$ 和输出 $y(n]$ ，则其特性保持不变，新流图是原流图的转置形式。



5.2 无限长脉冲响应基本网络结构

IIR (Infinite Impulse Response 无限长脉冲响应) 滤波器具有以下特点 (重点): 单位脉冲响应 $h(n]$ 无限长; 系统函数 $H(z)$ 在有限 z 平面 ($0 < |z| < \infty$) 上有极点存在; 结构上存在从输出到输入的反馈, 即结构是递归型的。

1. 直接型

对应的系统函数为:
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}$$

直接型包括直接 I 型和直接 II 型, 直接 II 型的推导, 利用到线性移不变系统, 交换级联子系统的次序, 系统函数不变。

对于直接 II 型, 要求能够直接由差分方程或系统函数绘出相应的信号流图, 反之亦然。

特点: 便于理解, 累积误差大, 运算速度相对慢。(重点)

2. 级联型

对应的系统函数为：
$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})}$$

把滤波器用若干二阶子网络级联起来构成，每个二阶子网络采用直接 II 型结构来实现。

特点：级联型结构中每一个一阶网络决定一个零点、一个极点，每一个二阶网络决定一对零点、一对极点。相对直接型结构，其优点是调整方便，此外，运算累积误差较直接型小。（重点）

3. 并联型

对应的系统函数为：

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_k(z)$$

特点：每一个一阶网络决定一个实数极点，每一个二阶网络决定一对共轭极点，调整极点位置方便，但调整零点位置不如级联型方便。运算误差不积累。运算速度最高。（重点）

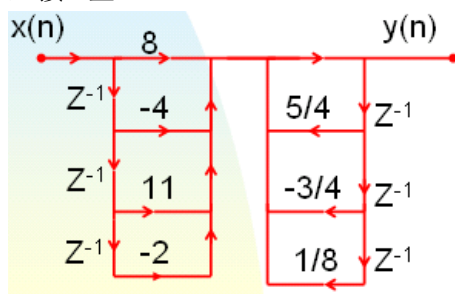
$$H(z) = \frac{8z^3 - 4z^2 + 11z - 2}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{8}}$$

例：已知 IIR DF 的系统函数为 画出直接 I 型、直接 II 型的结构流图。

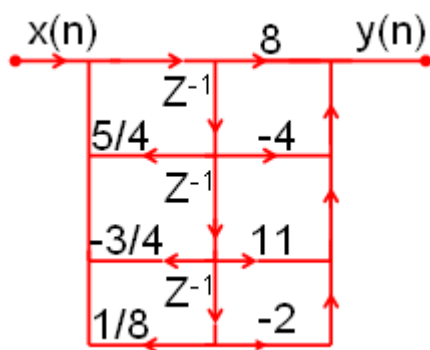
解：先将 $H(z)$ 化为 z^{-1} 的有理式

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

直接 I 型：



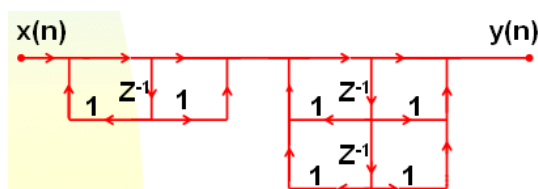
直接 II 型：



例：已知 IIR DF 的系统函数为 $H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-3}}$ 画出级联型和并联型的结构流图。

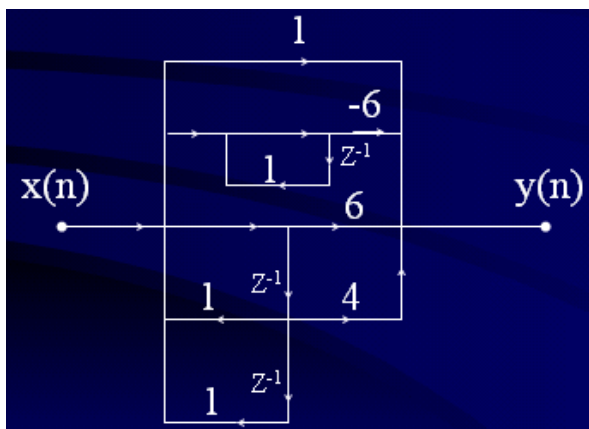
解：级联型

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-3}} \\
 &= \frac{(1 + z^{-1} + z^{-2}) + (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})}{(1 - z^{-1}) - (z^{-1} - z^{-3})} \\
 &= \frac{(1 + z^{-1} + z^{-2}) + z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1}) - z^{-1}(1 - z^{-2})} \\
 &= \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1}) - z^{-1}(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})} \\
 &= \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1} - z^{-2})}
 \end{aligned}$$



并联型：

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-3}} \\
 &= \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-3} + 4z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-3}} \\
 &= 1 + \frac{4z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-3}} \\
 &= 1 + \frac{-6}{1 - z^{-1}} + \frac{6 + 4z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}
 \end{aligned}$$



5.3 有限长脉冲响应基本网络结构

FIR (Finite Impulse Response 有限长脉冲响应) 滤波器具有以下特点(重点): 单位脉冲响应 $h(n)$ 有限长; 系统函数 $H(z)$ 在 $|z|>0$ 处收敛, 对因果系统而言, 极点全部位于 $z=0$ 处; 结构上主要是非递归结构, 没有输出到输入的反馈。

FIR 滤波器有以下几种基本结构: 直接型; 级联型。

1. 直接型

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

特点: 直观明了, 便于理解, 但不便于调整参数。(重点)

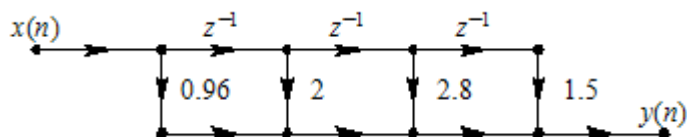
2. 级联型

将 $H(z)$ 因式分解得到

特点: 每一个一阶因子控制一个零点, 每一个二阶因子控制一对共轭极点, 调整零点位置比直接型方便, 但 $H(z)$ 中的系数比直接型多(近似 $3/2N$), 因而需要的乘法器多。(重点)

例: 已知 FIR DF 的系统函数为 $H(z) = 0.96 + 2.0z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$ 画出直接型和级联型的结构流图。(重点)

解: 直接型:

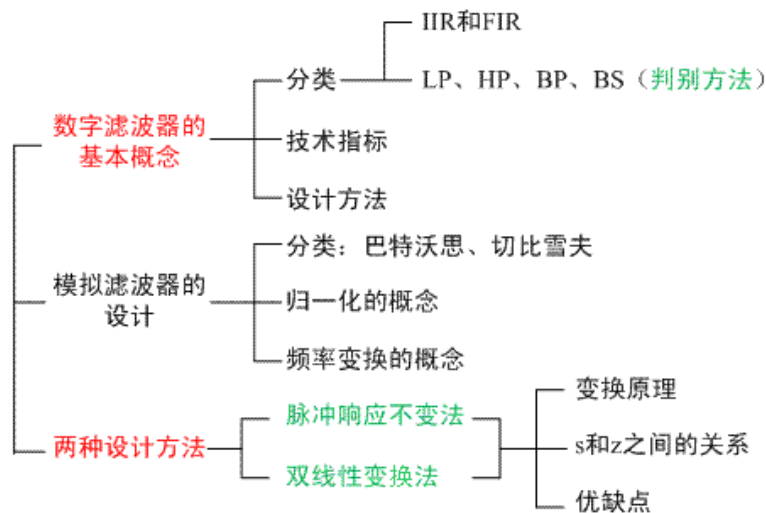


级联型:

1. IIR 和 FIR 滤波器的基本结构形式有哪些？各自有什么特点？
2. IIR 和 FIR 滤波器的基本特点是什么？

1. IIR 滤波器
2. FIR 滤波器

第六章：本章讲授了设计 IIR 滤波器常用的两种设计方法——脉冲响应不变法和双线性变换法。



6.1 引言

1.数字滤波器的分类

(1) IIR 和 FIR 数字滤波器 (重点)

(2) 低通、高通、带通、带阻滤波器

注意：数字滤波器 (DF) 与模拟滤波器 (AF) 的区别

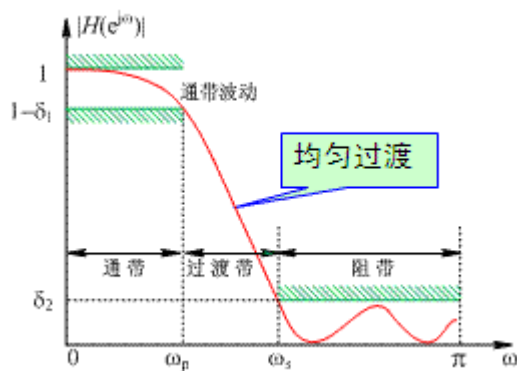
数字滤波器的频率响应都是以 2π 为周期的，滤波器的低通频带处于 2π 的整数倍处，而高频频带处于 π 的奇数倍附近。

2.设计指标描述

滤波器的指标通常在频域给出。

对 IIR 数字滤波器，通常用幅频响应来描述设计指标，而对于线性相位特性的滤波器，一般用 FIR 滤波器设计实现。

IIR 低通滤波器指标描述：



ω_p ——通带截止频率, ω_s ——阻带截止频率, α_p ——通带最大衰减, α_s ——阻带最小衰减, ω_c ——3dB 通带截止频率

3.设计方法（重点）

三步：（1）按照实际需要确定滤波器的性能要求。（2）用一个因果稳定的系统函数去逼近这个性能要求。（3）用一个有限精度的算法去实现这个系统函数。

IIR 滤波器常借助模拟滤波器理论来设计数字滤波器，（重点）设计步骤为：先根据所给的滤波器性能指标设计出相应的模拟滤波器传递函数 $H_a(s)$ (butterworth 滤波器设计法等，有封闭公式利用)，然后由 $H_a(s)$ 经变换（脉冲响应不变法或者双线性变换法等）得到所需的数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。在变换中，一般要求所得到的数字滤波器频率响应应保留原模拟滤波器频率响应的主要特性。为此要求：（重点）

- （1）因果稳定的模拟滤波器必须变成因果稳定的数字滤波器；
- （2）数字滤波器的频响应模仿模拟滤波器的频响应。

6.2 脉冲响应不变法、双线性不变法设计 IIR 数字低通滤波器

设计数字滤波器可以按照技术要求先设计一个模拟低通滤波器，得到模拟低通滤波器的传输函数 $H_a(s)$ ，再按一定的转换关系将 $H_a(s)$ 转换成数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

利用模拟滤波器的设计结果来求相应的数字滤波器，可以用映射的方法来实现，把 s 平面映射到 z 平面。这种由复变量 s 到复变量 z 之间的映射关系，必须满足三点要求：

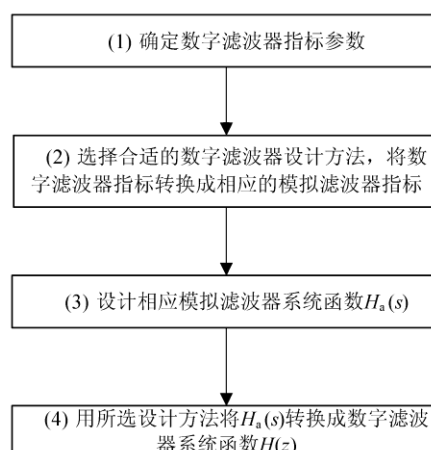


图 6.1 从模拟滤波器设计数字滤波器流程图

因果稳定的 $H_a(s)$ 映射成因果稳定的 $H(z)$ ，即 s 平面的左半平面必须映射到 z 平面单位圆的内部。（重点）

$H(z)$ 的频率响应能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应，即 s 平面的虚轴必须映射到 z 平面的单位圆上。变换前后的滤波器在时域或频域的主要特征(频率响应或单位冲激响应等)应尽可能相同或接近。主要有冲激不变法和双线性变换法。

1 脉冲响应不变法

设模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s)$ ，相应的单位冲击响应是 $h_a(t)$ ， $H_a(s) = \mathcal{L}[h_a(t)]$ 。LT[.] 代表拉氏变换。对 $h_a(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为 T ，得到 $h_a(nT)$ ，将 $h(n) = h_a(nT)$ 作为数字滤波器的单位脉冲响应，那么数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 便是 $h(n)$ 的 Z 变换。因此脉冲响应不变法是一种时域逼近方法，它使 $h(n)$ 在采样点上等于 $h_a(t)$ 。但是，模拟滤波器的设计结果是 $H_a(s)$ ，所以下面基于脉冲响应不变法的思想，导出直接从 $H_a(s)$ 到 $H(z)$ 的转换公式。

设模拟滤波器 $H_a(s)$ 只有单阶极点，且分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次，将 $H_a(s)$ 用部分分式

表示： $H_a(s) = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{s - s_i}$ 式中 s_i 为 $H_a(s)$ 的单阶极点。将 $H_a(s)$ 进行逆拉氏变换，得到：

$h_a(t) = \sum_{i=0}^N A_i e^{s_i t} u(t)$ 式中， $u(t)$ 是单位阶跃函数。对 $h_a(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为 T ，得

到： $h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=0}^N A_i e^{s_i nT} u(nT)$

对上式进行 Z 变换，得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$ ，即 $H(z) = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$

由于冲激响应不变法（又称标准 z 变换法）从 s 平面 $\rightarrow z$ 平面是通过 $z = e^{sT}$ 的多值映射，并不是一种简单的一一对应的代数映射关系。脉冲响应不变法所得到的数字滤波器的频率响应，不是简单的重现模拟滤波器的频率响应，而是模拟滤波器频率响应的周期延拓。所以希望所设计的滤波器是带限的，否则频率混叠现象会使设计出的数字滤波器在 $\omega = \pm\pi$ 附近的频率特性严重的偏离模拟滤波器在 $\pm \frac{\pi}{T}$ 处的频率特性，严重时使数字滤波器的指标得不到满足。

特点（重点）

优点：1.频率变换关系是线性的，即 $\omega = \Omega T$ ，如果不存在频谱混叠现象，用这种方法设计的数字滤波器会很好地重现原模拟滤波器的频响特性。2.数字滤波器的单位脉冲响应完全模仿模拟滤波器

的单位冲击响应波形，时域特性逼近好。**缺点：**会产生不同程度的频谱混叠失真，其适合用于带限滤波器（低通、带通滤波器）的设计，不适合用于高通、带阻滤波器的设计。

2 双线性变换法

s 平面 $\xrightarrow[\text{频率压缩}]{\text{非线性}}$ s_1 平面 $\xrightarrow[\text{不变法}]{\text{脉冲响应}}$ z 平面 (这种映射法能保证使 s 平面与 z 平面建立单值对应，从而消除混叠现象)

$$H_a(s) = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{s - s_i}$$

$$\text{将双线性变换 } s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{ 带入 } H_a(s), \text{ 得 } H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

s 平面的 Ω 与 z 平面的 ω 成非线性正切关系。正是因为如此，双线性变换法消除了频率混叠现象。但与此同时也直接影响数字滤波器频响逼真的模仿模拟滤波器的频响。这种频率之间的非线性变换关系带来了以下两个问题：

(1) 一个线性相位的模拟滤波器经双线性变换后得到非线性相位的数字滤波器；

(2) 如果模拟滤波器的频响具有片断常数特性，则转换到 z 平面上，数字滤波器仍具有片断常数特性，但特性转折点频率值与模拟滤波器特性转折点频率值成非线性关系。这种频率的畸变，可通过对频率进行预修正来予以校正。

特点（重点）

优点：1. 不产生频域混叠现象 2. 双线性变换法可由简单的代数公式 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 将 $H_a(s)$ 直接转换

成 $H(z)$ 。**缺点：** ω 与 Ω 之间的非线性关系是双线性变换法的缺点，是数字滤波器频响曲线不能保真地模仿模拟滤波器的频响曲线形状。只适合片段常数特性的滤波器设计。

例：已知模拟滤波器传输函数为 $H_a(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$ ，设 $T = 0.5s$ ，用脉冲响应不变法和双线性

变换法将 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

解：用脉冲响应不变法（令 $h(n) = Th_a(nT)$ ）将 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

$$H(z) = \frac{3T}{1 - e^{-2T} z^{-1}} - \frac{3T}{1 - e^{-3T} z^{-1}} = \frac{1.5}{1 - 0.3679z^{-1}} - \frac{1.5}{1 - 0.2231z^{-1}}。$$

用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{5 + 10z^{-1} + 5z^{-2}}{30 - 28z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{0.1667 + 0.3333z^{-1} + 0.1667z^{-2}}{1 - 0.9333z^{-1} + 0.2z^{-2}}$$

$$\begin{aligned}
 H_A(s) &= \frac{5}{(s+2)(s+1)} = \frac{k}{s+1} - \frac{5}{s+2} \\
 s=-1 & \quad s=-2 \\
 e^{-1} & \quad e^{-2} \\
 H(z) &= \frac{57}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{57}{1-e^{-2}z^{-1}} \\
 &= \frac{2.5}{1-e^{-0.5}z^{-1}} - \frac{2.5}{1-e^{-1}z^{-1}} \\
 &= \frac{2.5}{1-0.6z^{-1}} - \frac{2.5}{1-0.37z^{-1}} \\
 &= \frac{0.575z^{-1}}{0.222z^{-2} - 0.97z^{-1} + 1} \\
 S &= C \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad C = \frac{2}{T} = \frac{2}{0.5} = 4 \\
 S &= 4 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\
 \therefore H(z) &= H_A(s) \Big|_{S=4 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{\left(4 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 3\left(4 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 2}
 \end{aligned}$$

6.3 设计 IIR 数字滤波器的频率变换法

在设计一个低通滤波器的基础上采用频率变换法把低通滤波器转换成所要求的滤波器。因为数字滤波器设计都是从低通滤波器开始的，所以其他类型滤波器的设计都要把给定的技术指标转换成相应的模拟低通滤波器指标进行设计，然后再转换成相应的数字滤波器指标。

这种转换方法可以在模拟域进行，也可以在数字域完成。用两种变换方法进行各种频率范围的数字滤波器的设计过程可表示如下：

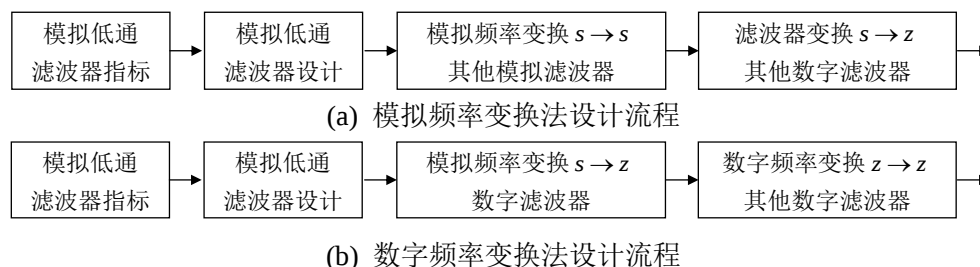


图 6.2 频率变换法设计数字滤波器流程

上面两种方法中模拟低通滤波器的技术指标可根据所设计的技术指标转换获得。也可给定一组相应指标进行设计，然后以此滤波器为基础进行各种变换。设计好的滤波器必须求其频率特性，进行指标验证。如果不满足给定数字滤波器指标，则需要修改模拟指标重新设计。

简答题：（重点）

1. 分析采用双线性变换法将该模拟滤波器转换成数字滤波器，数字滤波器的频率特性相对原模拟滤波器频率特性是否有失真，为什么？
2. 是否可以用脉冲响应不变法或双线性变换法把模拟带阻滤波器变换成数字带阻滤波器，为什么？

（答案：可以用双线性变换法把模拟带阻滤波器变换成数字带阻滤波器，但不能用脉冲响应不变法把模拟带阻滤波器变换成数字带阻滤波器。因为脉冲响应不变法中从 s 平面到 z 平面的映射是多值映射，将模拟带阻滤波器变成数字带阻滤波器会存在频率响应的混叠失真，而双线性变换法从 s 平面到 z 平面的映射是一一对应的，不存在频率响应的混叠失真。）

3. 说明脉冲响应不变法和双线性变换法各自的优点和缺点和适应范围？
4. 说明 IIR 数字滤波器间接设计法（由模拟滤波器到数字滤波器）的基本思想和设计要求。

名词解释：（重点）

1. IIR 数字滤波器间接设计法

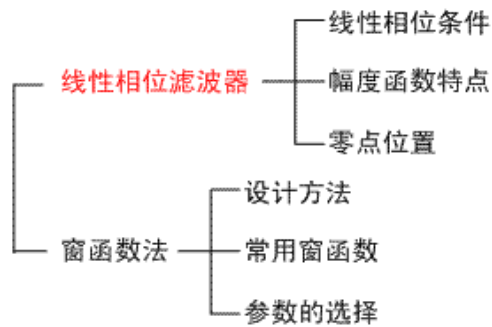
2. 双线性变换法

（双线性变换法是为克服脉冲响应不变法频率混叠现象提出的，其思想是将 s 平面上的点经过和二次映射到 z 平面。双线性变换法的优点是不会产生频率混叠，但却引入频率的非线性失真。）

3. 脉冲响应不变法

（脉冲响应不变法思想是把模拟滤波器的单位冲激响应经过采样作为相应数字滤波器的单位冲激响应。其 s 平面和 z 平面的映射关系为： $z_i = e^{s_i T}$ 。冲激不变法的优点是数字频率和模拟频率为线性关系即： $\omega = \Omega T$ 。缺点是会产生频率混叠，适用低通设计。）

第七章：本章主要讲授线性相位 FIR 滤波器常用的设计方法——窗函数法



7.1 线性相位 FIR 滤波器的特点（重点）

特点：可实现严格的线性相位特性、系统是稳定的、因果的、阶数较高
稳定和线性相位特性是 FIR 滤波器最突出的优点。

设 FIR 单位脉冲响应 $h(n)$ 长度为 N ，其传输函数为 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$ （重点）

$H(e^{j\omega})$ 线性相位是指 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，即群时延 $\tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = c$ （常数）

1 线性相位 FIR 数字滤波器时域约束条件(重点)

① 第一类线性相位（严格线性相位特性）对 $h(n)$ 的约束条件，要求 τ 和 $h(n)$ 满足：

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\omega\tau \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases} \quad \tau = \frac{N-1}{2} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

② 第二类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件，要求 τ 和 $h(n)$ 满足：

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau \\ h(n) = -h(N-1-n) \end{cases} \quad \tau = \frac{N-1}{2} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

问：何为线性相位滤波器？FIR滤波器成为线性相位滤波器的充分条件是什么？（重点）

答：线性相位的滤波器是指其相位函数 $\phi(\omega)$ 与数字频率 ω 成线性关系，即

$$\phi(\omega) = \beta - \alpha\omega (\alpha, \beta \text{ 为常数})。$$

FIR 滤波器成为线性相位的充分条件是：

① $h(n)$ 是实数。

② $h(n)$ 满足以 $n = \frac{N-1}{2}$ 为中心的偶对称或者奇对称，即 $h(n) = \pm h(N-1-n)$ 。

2. 线性相位 FIR 滤波器幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点(重点)

类型	$h(n)$	$H_g(\omega)$	适用类型
1 型	$h(n)=h(N-1-n)$, N 为奇数	$H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 、 π 、 2π 偶对称	全部
2 型	$h(n)=h(N-1-n)$, N 为偶数	$H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 、 2π 偶对称，关于 $\omega=\pi$ 奇对称	LP、BP
3 型	$h(n)=-h(N-1-n)$, N 为奇数	$H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 、 π 、 2π 奇对称	BP
4 型	$h(n)=-h(N-1-n)$, N 为偶数	$H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 、 2π 奇对称，关于 $\omega=\pi$ 偶对称	HP、BP

举例说明(重点)：

系统函数： $H(z) = 1 - 3z^{-1} - 6z^{-2} + 6z^{-3} + 3z^{-4} - z^{-5}$

差分方程： $y(n) = x(n) - 3x(n-1) - 6x(n-2) + 6x(n-3) + 3x(n-4) - x(n-5)$

因为 $h(n)$ 为奇对称， $N=6$ 为偶数。所以是 4 型（第二类线性相位、 N 为偶数情况）

3. 线性相位 FIR 滤波器零点分布特点

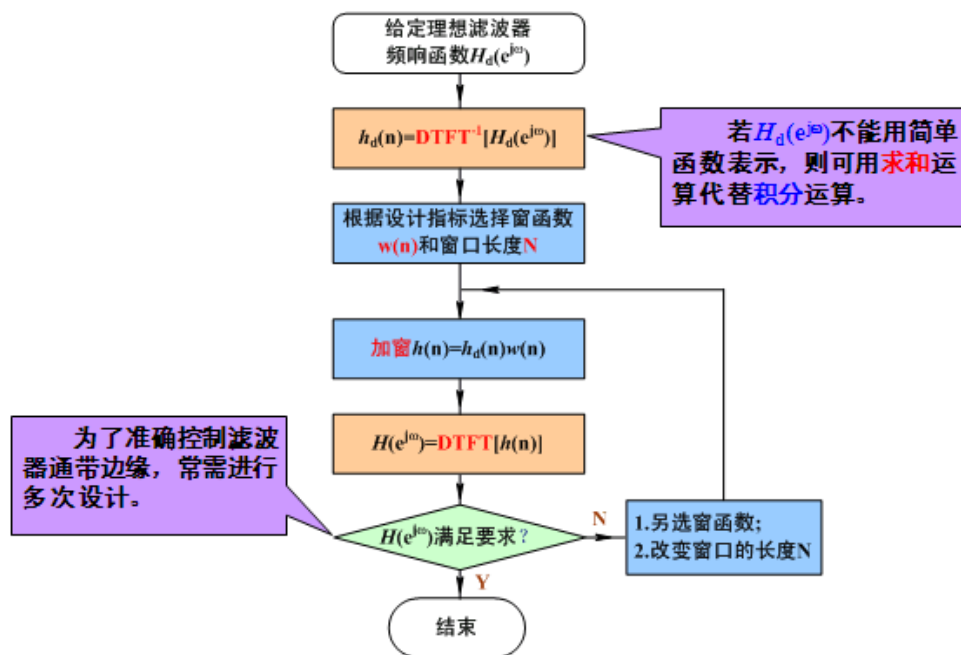
由于 $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$ ，线性相位 FIR 滤波器的系统函数的零点分布具有如下特点：如果

$z = z_i$ 是 $H(z)$ 的零点，其倒数 z_i^{-1} 也必然是其零点；因为 $h(n)$ 是实序列，故 $H(z)$ 的零点也必定共轭

成对，所以 z_i^* 和 $(z_i^{-1})^*$ 也是其零点。只要知道其中一个，其他三个也就确定了。所以，**零点必是互为倒数的共轭对。(重点)**

7.2 窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器的一般步骤

对于 FIR 滤波器来说，设计方法的关键要求之一就是保证线性相位条件。而 IIR 滤波器的设计方法中只对幅度特性进行了设计故无法保证这一点。所以，FIR 滤波器的设计需要采用完全不同的方法。FIR 滤波器的设计方法主要有窗函数法、频率采样法、切比雪夫逼近法等。



FIR 滤波器的窗函数法设计思想是：在保证线性相位条件的前提下，选择合适的 $h(n)$ 长度 N ，使其传输函数 $H(e^{j\omega})$ 满足技术指标要求。用一个长度为 N 的序列 $h(n)$ 替代无限长 $h_d(n)$ 作为实际设计

的滤波器的单位脉冲响应，其系统函数为
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$
 这种设计思想称为**窗函数设计法**。显

然在保证 $h(n)$ 对称性的前提下，窗函数长度 N 越长，则 $h(n)$ 越接近 $h_d(n)$ 。但是误差是肯定存在的，这种误差称为截断误差。

对 FIR 滤波器的影响：由于加窗后无限长的 $h_d(n)$ 变为有限长的 $h(n)$ ，肯定会引起误差，表现在频域就是通常所说的**吉布斯（Gibbs）效应**。吉布斯效应直接影响滤波的性能，导致通带内的平稳性变差和阻带衰减不能满足技术指标。通常滤波器设计都要求过渡带越窄越好，阻带衰减越大越好。所以设计滤波器的方法要使吉布斯效应的影响降低到最小。调整窗口长度 N 只能有效的控制过渡带的宽度，并不能减少带内波动以及增大阻带衰减。要想减小吉布斯效应的影响，增加 N 是无法实现的。如果改变窗函数的形状，使其幅度函数具有较低的旁瓣幅度，就可减小通带、阻带的波动，并加大阻带衰减。但是这时主瓣将会加宽以包含更多的能量，故而将会增加过渡带宽度。所以当 N 一定时，减小波动和减小过渡带是一对矛盾。必须根据实际要求，选择合适的窗函数以满足波动要求，然后选择 N 满足过渡带指标。

设计步骤：（1）根据对阻带衰减以及过渡带的指标要求，选择窗函数的类型，并估计窗口长度 N ；

（2）构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ ，即 $H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$ （3）计算 $h_d(n)$ ：

如果给出待求滤波器的频响函数为 $H_d(e^{j\omega})$ ，那么在单位脉冲响应作用下：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) d\omega; \quad (4) \text{ 加窗得到设计结果: } h(n) = h_d(n)w(n).$$

简答题(重点):

1. 用窗口法设计 FIR 数字滤波器时, 为了改善阻带的衰减特性, 窗函数形状需要满足的两个标准是什么? 对窗口函数形状要求: (1) 尽量减少窗口频谱中的旁瓣, 使能量尽量集中在主瓣中, 这样可减少上冲和余振, 提高阻带衰减。(2) 主瓣宽度尽量窄, 以获得较陡的过渡带。
2. 什么是吉布斯现象(效应)? 如何有效减少该效应的影响? (有限长的序列 $h(n)$ 去代替无限长的 $h_d(n)$, 肯定会引起误差, 表现在频域就是通常所说的吉布斯(Gibbs)效应。该效应引起过渡带加宽以及通带和阻带内的波动, 尤其使阻带的衰减减小, 从而满足不了技术上的要求。减少该效应只能从窗函数的形状上找解决问题的方法。构造新的窗函数形状, 使其谱函数的主瓣包含更多的能量, 相应旁瓣幅度更小。旁瓣的减小可使通带、阻带波动减小, 从而加大阻带衰减。)

注意正弦周期序列周期性的判定 (课本第 10 页)

2) 周期序列的表示方法:

- a. 主值区间表示法
- b. 模 N 表示法

3) 周期延拓

设 $x(n)$ 为 N 点非周期序列, 以周期序列 L 对作 $x(n)$ 无限次移位相加, 即可得到周期序列 $\tilde{x}(n)$, 即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-iL)$$

当 $L \geq N$ 时, $x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$

当 $L < N$ 时, $x(n) \neq \tilde{x}(n)R_N(n)$

(4) 序列的分解

序列共轭对称分解定理: 对于任意给定的整数 M , 任何序列 $x(n)$ 都可以分解成关于 $c = M/2$ 共轭对称的序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称的序列 $x_o(n)$ 之和, 即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n), -\infty < n < \infty$$

并且

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(M-n)] \quad x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(M-n)]$$

1、物理意义: 序列傅里叶变换本质上是序列的一种分解, 它将一般序列分解为无穷多个数字角频率 $[-\pi, \pi]$ 中的复指数序列。称 $X(e^{j\omega})$ 为序列 $x(n)$ 的频谱, 其模 $|X(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性, 其幅角 $\arg[X(e^{j\omega})] = \theta(\omega)$ 称为相频特性。

2、尽管序列 $x(n)$ 是离散时间信号, 但它的序列傅里叶变换对数字角频率 ω 而言却是连续函数, 因此, 序列 $x(n)$ 的傅里叶变换是连续的。

由于的周期性, 使得 $\omega = 0$ 或 2π 的整数倍都表示信号的直流分量, 而 π 的奇数倍表示信

号的最高频率。

时移性质	$SFT[x(n-m)] = e^{-j\omega m} \cdot SFT[x(n)]$
频移性质	$SFT[e^{j\omega_0 n} \cdot x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
共轭对称性质	$SFT[x_R(n)] = X_e(e^{j\omega}), SFT[jx_I(n)] = X_o(e^{j\omega})$ $SFT[x_e(n)] = \text{Re}[X(e^{j\omega})], SFT[x_o(n)] = j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$
线性卷积性质	$SFT[x(n) * y(n)] = SFT[x(n)] \cdot SFT[y(n)]$
帕斯瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
相乘性质	$SFT[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
序列乘以 n	$SFT[n \cdot x(n)] = j[dX(e^{j\omega}) / d\omega]$

序列	傅里叶变换
$\delta(n)$	1
1	$2\pi\tilde{\delta}(\omega)$
$R_N(n)$	$e^{-j\omega(N-1)/2} \sin(\frac{\omega N}{2}) / \sin(\frac{\omega}{2})$
$a^n u(n) (a < 1)$	$(1 - ae^{-j\omega})^{-1}$
$e^{j\omega_0 n} (2\pi / \omega_0 \text{为有理数})$	$2\pi\tilde{\delta}(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 n (2\pi / \omega_0 \text{为有理数})$	$\pi[\tilde{\delta}(\omega - \omega_0) + \tilde{\delta}(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 n (2\pi / \omega_0 \text{为有理数})$	$-j\pi[\tilde{\delta}(\omega - \omega_0) - \tilde{\delta}(\omega + \omega_0)]$
$u(n)$	$(1 - e^{-j\omega})^{-1} + \pi\tilde{\delta}(\omega)$

(二) 离散时间系统

1. 系统函数的收敛域与系统因果性和稳定性

当且仅当系统函数 $H(z)$ 的收敛域为小于单位圆的某个圆的园外时，系统是因果稳定的。

2. 系统函数的零极点分布与系统因果性和稳定性

若系统是因果稳定的，则 $H(z)$ 的极点必定在单位圆内。

3. 系统函数的零极点分布对系统频率响应特性的影响

1、对极点而言：当单位圆上的点转到某个极点附近时， $|H(e^{j\omega})|$ 在这附近出现峰值。极点越靠近单位圆，振幅特性的峰值越大，当极点出现在单位圆上时，振幅特性将出现无穷大，系统不稳定。

2、对零点而言：当单位圆上的点转到某个零点附近时， $|H(e^{j\omega})|$ 在这附近出现谷点。当零点出现在单位圆上时，振幅特性为零。零点可以位于单位圆外，不影响稳定性。

两个概念——

1、最小相位系统：系统 $H(z)$ 的全部零极点都在单位圆内，某点在单位圆上逆时针旋转一周时，系统的相位变化最小。

2、最大相位系统： $H(z)$ 的全部零点在单位圆外，系统的相位变化最大。

说明：处于坐标原点的零极点不影响系统的幅频响应；利用零极点分析系统的幅频响应，仅对低阶系统有效。

（三）离散时间信号与模拟（连续）时间信号

1. 时域关系

设连续时间信号 $x_a(t)$ ，离散时间信号 $x(n)$ ，则

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(t)|_{t=nT}$$

2. 频域关系

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\Omega - m\Omega_s)]$$

在时域对信号抽样，其频域的特征就是频谱以采样频率 Ω_s 为周期进行周期延拓。

一个域的离散必然导致另一个域的周期延拓

一个域的周期延拓必然导致另一个域的离散

对应变量的关系： ω —单位：rad Ω —单位：Hz

$$\omega = \Omega T$$

$$\text{由于 } \Omega \leq \Omega_s, \text{ 所以 } \omega_{\max} = \Omega_s T = 2\pi$$

三、离散傅里叶变换（DFT）

（一）离散傅里叶级数变换（DFST）

说明：周期序列不满足绝对可和的条件，不适用于序列傅里叶变换的定义式，但是它可以展开成离散傅里叶级数（Discrete Fourier Series, DFS），利用离散傅里叶级数可以得到周期序列的离散傅里叶变换表示式。

1. 定义

$$\text{DFST: } \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}, -\infty < k < \infty$$

$$\text{IDFST: } \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}, -\infty < n < \infty$$

注：1、周期单位复指数序列 $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$, $W_N^{-nk} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

周期单位复指数序列对 n 、 k 而言都是以 N 为周期的，即

$$W_N^{(n+N)k} = W_N^{nk}, -\infty < n, k < \infty$$

$$W_N^{n(k+N)} = W_N^{nk}, -\infty < n, k < \infty$$

$$W_N^{(nk+N)} = W_N^{nk}, -\infty < n, k < \infty$$

2、周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 可以分解成 N 个周期复指数序列的和，这些周期复指数序列的数字角频率为 $\frac{2\pi k}{N}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) 周，它们的幅度和相位由离散傅里叶级数

$\frac{\tilde{X}(k)}{N}$ 决定。

2.基本周期序列的离散傅里叶级数变换

时域序列	离散傅里叶级数变换 (DFST)
$\tilde{\delta}(n)$	1
1	$N\tilde{\delta}(k)$
$e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$	$N\tilde{\delta}(k-m)$
$\cos(2\pi mn/N)$	$N[\tilde{\delta}(k-m) + \tilde{\delta}(k+m)]/2$
$\sin(2\pi mn/N)$	$-jN[\tilde{\delta}(k-m) - \tilde{\delta}(k+m)]/2$

3.周期序列的离散傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

可类比信号系统中周期信号的傅里叶变换，具体推导过程见课本 76 页。

(二) 离散傅里叶变换 (DFT)

1.定义

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, 0 \leq k \leq N-1$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, 0 \leq n \leq N-1$$

要点:

(1) DFT 没有实际的物理含义，但是可以理解为 SFT 的等间隔采样，即

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, 0 \leq k \leq N-1$$

(2) 变换区间: $[0, N-1]$ ，有限长 N 点

(3) 变换结果: 与序列长度 N 有关，当 N 足够大时， $|X(k)|$ 的包络趋近于 $|X(e^{j\omega})|$ 曲线

(4) 频谱分析的意义:

$|X(k)|$ 表示 $\omega_k = (2\pi/N)k$ 频点的幅度谱线，如果 $x(n)$ 是模拟信号的采样，采样间隔为

T ， $\omega = \Omega T = 2\pi f/T$ ，则 k 与相应的模拟频率的关系为: $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k = 2\pi f_k T$ 即

$f_k = \frac{k}{NT}$ 。对模拟频率域而言， N 点 DFT 意味着频域采样间隔为 $\frac{1}{NT}$ Hz。所以用 DFT

进行谱分析时，称 $F = \frac{1}{NT}$ 为频率分辨率。而 NT 表示时域采样的区间长度(即观察时间或记录长度 $T_p = NT$)，显然为了提高分辨率就必须是记录长度足够大。

(5) DFT 的隐含周期性

1) DFT 是 SFT 的等间隔采样，而 $X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期;

2) $W_N^k = W_N^{(k+mN)}$ 的周期性

3) 时域抽样，频域周期延拓; 频域采样，时域周期延拓

2.DFT 的主要性质

性质	时域 ($x(n)$ 、 $y(n)$)	频域 ($X(k)$ 、 $Y(k)$)
时域循环移位性质	$x((n+m))_N R_N(n)$	$W_N^{-km} X(k)$
频域循环移位性质	$W_N^{nl} x(n)$	$X((k+l))_N R_N(k)$
时域循环卷积	$x_1(n) \otimes x_2(n)$	$X_1(k) X_2(k)$
频域循环卷积	$x_1(n) x_2(n)$	$\frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$
复共轭序列的 DFT	$x(n)^*$	$X^*(N-k)$
共轭对称性	$x_{ep}(n)$	$X_R(k)$

	$x_{op}(n)$	$jX_I(k)$
	$x_R(n)$	$X_{ep}(k)$
	$jx_I(n)$	$X_{op}(k)$
帕斯瓦尔定理	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$	

3.基本序列的离散傅里叶变换

时域序列	离散傅里叶级数变换 (DFST)
$\delta(n)$	1
$R_N(n)$	$N\delta(k)$
$e^{j\frac{2\pi}{N}mn} R_N(n)$	$N\delta(k-m)$
$\cos(2\pi mn / N) R_N(n)$	$N[\delta(k-m) + \delta(k-N+m)] / 2$
$\sin(2\pi mn / N) R_N(n)$	$-jN[\delta(k-m) - \delta(k-N+m)] / 2$

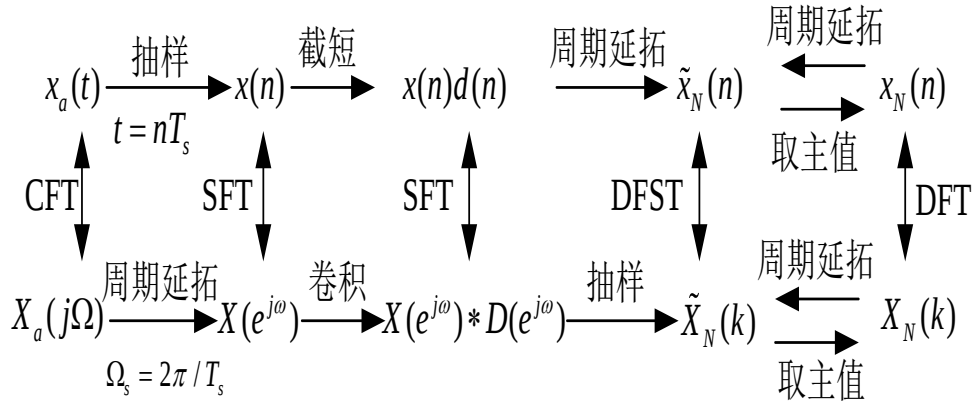
4.频域采样定理

设序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，在区间 $[0, 2\pi)$ 内对 $X(e^{j\omega})$ 进行 N 点等间隔采样（采样间隔为 $2\pi / N$ ）得到序列 $X(k)$ ，且 $X(k)$ 对应的 IDFT 为 $x_N(n)$ ，则

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

这是因为，在频域内对 $X(e^{j\omega})$ 等间隔采样，导致时域序列 $x(n)$ 周期延拓，并且在区间 $[0, 2\pi)$ 采样得到的序列 $X(k)$ 的 IDFT 是原序列以 N 为周期进行周期延拓后的主值序列。若序列的长度为 M ，那么只有当频域采样点数 $N \geq M$ 时，才有 $x_N(n) = x(n)$ ，此时才能由频域采样序列 $X(k)$ 恢复 $X(e^{j\omega})$ 。

（三）连续信号傅里叶变换（CFT）、序列傅里叶变换（SFT）、离散傅里叶级数变换（DFST）、离散傅里叶变换（DFT）的关系



各个变量对应关系：

	$k: 0 \sim N-1$	k
数字角频率	$\omega: 0 \sim 2\pi$	$2\pi k / N$
数字频率	$F: 0 \sim 1$	k / N
模拟频率	$f: 0 \sim f_s$	$k f_s / N$
模拟角频率	$\Omega: 0 \sim 2\pi f_s$	$\frac{2\pi k}{N} f_s$

$$\omega = \Omega T_s, \quad \omega_s = \Omega_s T_s = 2\pi f_s T, \quad \omega = 2\pi k / N$$

一个域的离散必然导致另一个域的周期延拓，当对时域的信号进行采样时，其频谱必然进行周期延拓，所以序列的傅里叶变换是连续周期的，这样计算机就没法对其频谱进行分析。这时，对时域信号进行周期延拓，又会使其频谱离散化。经过两个域的分别离散化和周期延拓，这时得到的就是 DFST 的对应关系。那么，分别对两个域取主值，就可得到适合计算机处理的时域和频域序列。DFT 就应运而生。

（四） 卷积的计算

1. 循环卷积与线性卷积（有限长序列的卷积）

设有限长序列 $x(n)$ 的长度为 N ， $h(n)$ 的长度为 M ，它们线性卷积结果为 $y_l(n)$ ，长度为 $L_g = N + M - 1$ ；循环卷积结果为 $y_c(n)$ ，长度为 L 。则两类卷积有如下对应关系：

（设 $N \geq M$ ）

（1）当 $L = N$ 时

$$y_c(n) = \begin{cases} y_l(n) + y_l(n + N), & 0 \leq n \leq M-2 \\ y_l(n), & M-1 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

（2）当 $L \geq L_g$ 时

$$y_c(n) = y_l(n)$$

（3）当 $N \leq L < L_g$ 时

$$y_c(n) = \begin{cases} y_l(n) + y_l(n+L), & 0 \leq n \leq L_g - L - 1 \\ y_l(n), & L_g - L \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

2. 重叠保留法和重叠相加法（无限长序列得卷积）

（1）重叠保留法

基本思路：将两个序列中长度较长或无限长的序列均匀分段，计算各个有限长的子序列与另一短序列的线性卷积，最后将结果重叠相加起来输出。（**重叠的是卷积结果**）

设有限长序列 $h(n)$ 的长度为 M ， $x(n)$ 为无限长序列，

计算步骤：1) 将 $x(n)$ 均匀分段，每段长度为 N

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n)$$

$$x_k(n) = x(n)R_N(n-kN) = \begin{cases} x(n), & kN \leq n \leq (k+1)N - 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

2) 计算每段子序列与短序列的线性卷积

设 $x'_k(n) = x_k(n-kN)$ ，即计算 $x'_k(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积 $y'_k(n)$

3) 将各子序列线性卷积的结果移位后相加得总输出

$$\text{令 } y_k(n) = y'_k(n-kN), \text{ 则 } y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n)$$

（2）重叠保留法

基本思路：将两个序列中长度较长或无限长的序列在时间上有重叠地分段，计算各个有限长的子序列与另一短序列的线性卷积，最后保留每段结果中间 N 个点，相加输出。（**重叠的是较长的序列**）

设有限长序列 $h(n)$ 的长度为 M ， $x(n)$ 为无限长序列，

计算步骤：1) 将 $x(n)$ 有重叠地分段（每一段由 kN 向前重叠 $M-1$ 个点），每段长度为 $N+M-1$

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n), & kN - M + 1 \leq n \leq (k+1)N - 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

2) 计算每段子序列与短序列的线性卷积

设 $x'_k(n) = x_k(n+kN-M+1)$ ，即计算 $x'_k(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积 $y'_k(n)$ ， $y'_k(n)$ 的长度为 $N+2M-2$ ，将前 $M-1$ 个点去掉，后 $M-1$ 个点去掉，保留中间 N 个点得 $y_k(n)$

3) 将各子序列线性卷积的结果移位后相加得总输出

$$\text{即 } y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n)$$

说明：重叠保留和相加法必须掌握，公式可以不必记忆，明白其算法思想，会计算即可。而且计算时注意三步走（写在卷子上），否则答案正确也没分（与数学归纳法一样，有固定格式）。

（五）用 DFT 进行频谱分析的误差

1. 泄漏现象

产生原因：用 DFT 进行分析时，隐含对序列在时域加窗截断，使得信号的原有频率的能量向其他频率上泄漏

减少方法：（1）加大窗长，增加实际 DFT 计算的点数；

(2) 变换时域所加窗函数的形式

2. 栅栏现象

产生原因：DFT 只计算 $\omega = 2\pi k / N, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 的频谱

减少方法：在序列末尾加零以增加 DFT 的点数

3. 混叠现象

产生原因：序列截断以及采样频率不完全满足采样定理

减少方法：以较高的采样频率对信号进行采样，之后序列通过数字低通滤波器，降低采样频率后再进行 DFT 分析

4. DFT 的分辨率：参数选择的一般原则：

a. 若已知信号的最高频率防止混叠，选定采样频率 $f_s \geq 2f_{\max}$

b. 根据频率分辨率 F，确定所需 DFT 的长度 $N = f_s / F$

c. 和 N 确定以后，即可确定相应模拟信号的时间长度 $T_p = f_s / N = NT$ ，这里 T 是采样周期。

(六) 离散时间信号的抽取和内插

1. 离散时间信号的整数倍抽取

时域： $y(n) = x(Dn)$

$$\text{频域： } Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{D}})$$

整数倍抽取将导致数字频谱的展宽

2. 离散时间信号的整数倍内插

$$\text{时域： } v(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{I}), & n = 0, \pm I, \pm 2I, \dots \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\text{频域： } V(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega I})$$

序列相邻采样点之间插零将导致数字频谱压缩

说明：即使抽取和内插的公式记不住，也要学会画图分析其过程

各种域和各种变换的关系总结如图 1-5 所示。

