JNOTES

日期：　　/

命题逻辑的基本概念

一、命题：能判定真假的陈述句

二、命题联结词

联结词	非	并且	或	如果…则…	当且仅当
	→否定	→合取	→析取	→蕴涵	→等价

①

p	$\neg p$
0	1
1	0

②

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

③

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

④

p	q	$p\to q$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

⑤

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \to q$

前件　后件

条件　结论

$1 \to 0$　　0

运算优先级：

$\neg\ \wedge\ \vee\ \to\ \leftrightarrow$　　例，$\neg p \to q\vee r \Leftrightarrow (\neg p)\to(q\vee r)$

注：

①"$\vee$" 兼容或　　不兼容或：$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

公式的类型：重言式 —— 恒为1　（永真式）

矛盾式 ·· 0　（永假式）

可满足式：非矛盾式

日期：　　/

命题逻辑等值演算

一、等值式：

若 $A \leftrightarrow B$ 永真式，则称A,B是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$，称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式

常见的等值式：

① 双否律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

② 幂等律 $A \wedge A \Leftrightarrow A$　　$A \vee A \Leftrightarrow A$

③ 交换律 $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$　　$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

④ 结合律 $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$　　$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

⑤ 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$　　$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

⑥ 德摩根律 $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$　　$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

⑦ 吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$　　$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

⑧ 零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

⑨ 同一律 $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$．$A \vee 0 \Leftrightarrow A$

⑩ 排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

⑪ 矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

⑫ 蕴含等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

日期:　　/

⑬ 等价等值式　　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

⑭ 假言易位　　$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

⑮ 等价否定　　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

⑯ 归谬论　　$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

思路：去掉 $\rightarrow$、$\leftrightarrow$　换成 $\neg$　$\wedge$　$\vee$

析取范式、合取范式

命题常量　p：雪是白色

命题变量　p

析取式：$p \vee q$，$p \vee \neg q$，$\neg p$

合取式：$\neg p \wedge q$，$p \wedge q \wedge r$，$\neg r$

析取范式：$(\ \wedge\ \wedge\ ) \vee (\ \wedge \wedge\ ) \vee (\ \wedge\ \wedge\ )$ 都可

合取范式：$(\ \vee\ \vee\ ) \wedge (\ \vee \vee\ ) \wedge (\ \vee \vee\ )$ 都可

其中：一个公式的析取范式，合取范式不唯一

三、主析取范式、主合取范式

极小项 公式	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2
$p \wedge q$	1 1	m_3

极小项：

$\underline{\Delta \wedge \Delta \wedge \Delta}$

对于 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots A_n$ 中 A_i 都是极小项，则该析取范式为主析取范式

含有3个变元的极小项：

公式	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 1	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7

日期:　　/

大项(极大项):含两个命题变元:

公式	成假赋值	名称
$p\vee q$	0 0	M_0
$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

同理,含n个命题变元的极大项

$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$ 其中 A_i 为大项. 则为主合取范式

例:求 $p\rightarrow q$ 的主合取范式和主析取范式

小项.　　真值表法. 等值演算法

法一:真值表.

公式	成真赋值	$p\rightarrow q$
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	1
$\neg p\wedge q$	0 1	1
$p\wedge\neg q$	1 0	0
$p\wedge q$	1 1	1

主析取范式:

$p\rightarrow q \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

即 $\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3$.

主合取范式: $\boxed{\neg p\vee q}$ 即 M_2

1 0 所对应的大项(成假赋值)

日期:　　/

法二: 等值演算

$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ --- 主合取范式

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q)$　主析取 $(\ ) \vee (\ )$.

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ --- 主析取范式

联结词的完备集.

$S_7 = \{\uparrow\}$: "$\uparrow$" 与非.　$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

$S_8 = \{\downarrow\}$: "$\downarrow$" 或非　$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

命题逻辑推理理论.

$\Downarrow$

前提 $\Rightarrow$ 结论　　$A \to B$ 重言式: $A \Rightarrow B$

推理规则　　$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \Rightarrow B$

① 真值表法

② 等值演算法

③ 在自然推理系统中用推理规则证明.

日期:　　　/

需要记的推理规则:

① $p\wedge q \Rightarrow p$, $p\wedge q \Rightarrow q$. (化简规则)

② $p \Rightarrow p\vee q$, $q \Rightarrow p\vee q$ (附加规则)

③ p, $p\rightarrow q \Rightarrow q$ (假言推理)

④ $p\rightarrow q$　$\neg q \Rightarrow \neg p$ (拒取式)

* ⑤ $p\vee q$, $\neg p \Rightarrow q$ (析取三段论)

⑥ p. $q \Rightarrow p\wedge q$ (合取式)

* ⑦ $p\rightarrow q$. $q\rightarrow r \Rightarrow p\rightarrow r$. (假言三段论)

⑧ $p \leftrightarrow q$. $q \leftrightarrow r \Rightarrow p \leftrightarrow r$ (等价三段论)

* ⑨ $p\rightarrow q$.　$r\rightarrow s$, $p\vee r \Rightarrow q\vee s$ (构造性二难)

⑩ $p\vee q$. $\neg p\vee s \Rightarrow q\vee s$ (归结式)

日期:　　/

例: 证明: $(p\vee q)\wedge(p\leftrightarrow r)\wedge(q\rightarrow s)\Rightarrow s\vee r$

① ② ③ 结论.

思路:

$p\vee q \Leftrightarrow \neg p\rightarrow q$

$q\rightarrow s$

$\rightarrow \neg p\rightarrow s \Leftrightarrow p\vee s \Leftrightarrow \neg s\rightarrow p$

$p\leftrightarrow r \Leftrightarrow (p\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow p)$

$\Rightarrow \neg s\rightarrow r \Rightarrow s\vee r$

证明.

步骤	公式	理由
①	$p\vee q$	前提引入
②	$\neg p\rightarrow q$	① 置换规则
③	$q\rightarrow s$	前提引入
④	$\neg p\rightarrow s$	②③ 假言三段论
⑤	$\neg s\rightarrow p$	④ 置换规则
⑥	$p\leftrightarrow r$	前提引入
⑦	$(p\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow p)$	⑥ 置换规则
⑧	$p\rightarrow r$	⑦ 化简规则.
⑨	$\neg s\rightarrow r$	⑤ ⑧ 假言三段论
⑩	$s\vee r$	⑨ 置换规则

日期: /

前提 $(p \vee q) \to r$, $r \to s$, $\neg s$.

结论: $\neg q$

① $\neg s$ 前提引入

② $r \to s$ 前提引入

③ $\neg r$ ①② 拒取式

④ $(p \vee q) \to r$ 前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$ ③④ 拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$ ⑤ 置换规则

⑦ $\neg q$ ⑥ 化简规则

归谬法 (反证法)

把结论否定 作为前提, 推矛盾

① $\neg\neg q$, 附加前提引入

② q ① 置换

③ $p \vee q$ ② 附加规则

④ $p \vee q \to r$ 前提引入

⑤ r ③, ④ 假言推理

⑥ $r \to s$ 前提引入

⑦ s ⑤⑥ 假言推理

⑧ $\neg s$ 前提引入

⑨ $s \wedge \neg s$ ⑦⑧ 合取

∴ 矛盾. 故 $\neg q$ 为推理的有效结论

日期:　　/

谓词逻辑

个体词：可独立存在的客体

谓词：用来说明个体的性质或个体间的关系

$A(x)$：一元谓词	个体变元：x, y
$H(x,y)$：二元谓词	谓词常项：$A(a)$，$H(a,b)$
n元谓词	谓词变项：$A(x)$，$H(x,y)$
个体常元：a, b	

个体域：个体变动的取值范围

量词：表示个体之间的数量关系

例：尽管有人聪明，但未必所有人都聪明

设 $A(x)$：x是人，$B(x)$：x聪明

符号化为 $\exists x(A(x) \land B(x)) \land \neg\forall x(A(x) \to B(x))$

总结：全称量词 $\forall$ 后加"$\to$"

存在量词 $\exists$ 后加"$\land$"

量词的指导变元：$\forall x$，$\forall y$，$\exists z$

量词的辖域：量词的作用范围

日期:　　/

设A和B是任意两个谓词公式，如果有 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，称A与B等价，记为 $A \Leftrightarrow B$

熟记等价式:

①命题逻辑中的等价式和代换实例是谓词逻辑中的等价式.

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B \qquad P(x) \to Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \qquad \neg(\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \Leftrightarrow \neg\exists x P(x) \vee \neg\forall x Q(x)$$

②量词否定转换:

$$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

③量词辖域的扩张和收缩:

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

④量词的分配律:

$$\forall (x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

日期: /

例: 设个体域 $D=\{a,b,c\}$. 消去公式中的量词.

$\forall x\forall y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow\forall yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee\forall yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg F(x)\vee\forall yG(y) \Leftrightarrow \neg\exists xF(x)\vee\forall yG(y)$

$\Leftrightarrow \exists xF(x)\rightarrow\forall G(y) \Leftrightarrow (F(a)\vee F(b)\vee F(c))\rightarrow(G(a)\wedge G(b)\wedge G(c))$

定义6. 一个谓词公式A若具有形式 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nM$. 其中每个 Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists$, M为不含量词的公式. 则A称为前束范式

例: ① $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$ 前束范式不唯一

$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

② $\forall xF(x)\wedge\forall yG(y)$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y))$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall xG(x)$ 换名规则

$\forall x(F(x)\wedge G(x))$

日期: /

谓词演算的推理理论:

规则:

1. UI(全称量词消去规则): $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(x)$　$A(c)$

2. EI(存在量词消去规则): $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(c)$

3. UG(全称量词引入规则): $A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$　y为任意值, 从y均为真

4. EG(存在量词引入规则): $A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$

例: 构造下列推理的证明:

① 前提: $\forall x(F(x) \to G(x))$, $\forall x F(x)$

结论: $\forall x G(x)$

证明:
① $\forall x(F(x) \to G(x))$　前提引入
② $F(c) \to G(c)$　①UI
③ $\forall x F(x)$　前提引入
④ $F(c)$　③UI
⑤ $G(c)$　②④假言推理
⑥ $\forall x G(x)$　⑤UG

② 前提: $\forall x(F(x) \vee G(x))$, $\neg \exists x G(x)$

结论: $\exists x F(x)$

证明: ① $\neg \exists x G(x)$　前提引入
② $\forall x \neg G(x)$　①置换

日期: /

结论否定加入前提⇒矛盾

归谬法 (反证法)

③ $\neg G(c)$　② UI

④ $\forall x(F(x) \vee G(x))$　前提引入

⑤ $F(c) \vee G(c)$　④UI

⑥ $F(c)$　③⑤析取三段论

⑦ $\exists x F(x)$　⑥EG

① $\neg\exists x F(x)$　结论否定引入

② $\forall x \neg F(x)$　①置换

③ $\neg F(c)$　②UI

④ $\neg\exists x G(x)$　前提引入

⑤ $\forall x \neg G(x)$　④置换

⑥ $\neg G(c)$　⑤UI

⑦ $\forall x(F(x) \vee G(x))$　前提引入

⑧ $F(c) \vee G(c)$　⑦UI

⑨ $F(c)$　⑥⑧析取三段论

⑩ $F(c) \wedge \neg F(c)$　③⑨合取

矛盾，结论得证

集合代数:

元素 $\in$ $\notin$ 集合　　集合 $\subseteq$ $\nsubseteq$ $\neq$ 集合

一、集合的基本运算

并运算、交运算、差运算

对称差: $A\oplus B=\{x \mid (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)\}$

④ $P(A)$: A的幂集　　$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$

是A所有子集组成的集合　　④ 若 $|A|=n$, 则 $|P(A)|=2^n$

例: $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$　　证

证: 若 $A\subseteq B$,

$\forall x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

若 $x\in A$, $\because A\subseteq B$ $\therefore x\in B$

则有 $A\cup B\subseteq B$

又 $\because B\subseteq A\cup B$ $\therefore A\cup B=B$.

若 $A\cup B=B$ △

$\forall x\in A$, 有 $x\in A\cup B$

又 $\because A\cup B=B$

$\therefore x\in B$　$\therefore A\subseteq B$ △

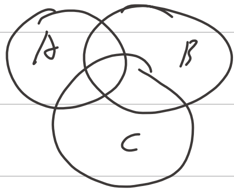
容斥原理.

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

日期: /

$$|\bar{A}\cap\bar{B}| = |E| - |A\cup B| = |E| - (|A|+|B|) + |A\cap B|$$

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$



$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |E| - |A\cup B\cup C|$$

日期: /

二元关系

1. A与B的笛卡尔积： $A\times B=\{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in B\}$.

2. A到B的关系： $A\times B$的子集都是从A到B的关系

A上的关系： $A\times A$的子集都是A上的关系。

A上的特殊关系：空关系，全域关系，恒等关系

$\varnothing$ E_A全域 I_A

$A=\{1,2\}$ $B=\{a,b\}$. $A\times B=\{<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>\}$

$A\times B\supseteq R=\{<1,a>,<2,b>\}$ R是A到B上的关系.

$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$.

$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$.

3. 关系的表示：关系矩阵，关系图.

（关系性质的判断方法）

4. 关系的性质：自反、反自反、对称、反对称、传递

R在A上自反 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$

R在A上反自反 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$.

对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge <x,y>\in R\rightarrow <y,x>\in R)$.

反对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R\rightarrow x=y)$

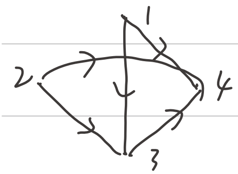
$\Leftrightarrow \forall x\forall y(x,y\in A\wedge <x,y>\in R\wedge x\neq y\rightarrow <y,x>\notin R)$

传递 $\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R)$

日期:　　/　　关系的域：fldR = domR ∪ ranR

$A=\{1,2,3,4\}$　　$R=\{<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>,<3,4>\}$.

(1) R的关系图.　　(2) 关系矩阵　　(3) domR $=\{1,2,3\}$ 定义域



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0&0&1&1 \\ 2 & 0&0&1&1 \\ 3 & 0&0&0&1 \\ 4 & 0&0&0&0 \end{array}$$

ranR $=\{3,4\}$ 值域

(4) $R^{-1}=\{<3,1>,<4,1>,<3,2>,<4,2>,<4,3>\}$.

(5) $R\circ R=R^2=\{<1,4>,<2,4>\}$　$R\circ S$　关系的合成

$=\{<x,z>\mid \exists y(<x,y>\in R \wedge <y,z>\in S)\}$

传递：$<x,y>\in R$

$<y,z>\in R$

$<x,z>\in R^2$

(6) 说明R的性质：

$\because <1,1>\notin R$ ∴R不是自反

$\because \forall x\in A.\ <x,x>\notin R$ ∴ R是反自反的.

$\because <1,3>\in R,\ <3,1>\notin R$ ∴R不是对称的

R是反对称的.　R是传递的.

日期: /

关系的闭包

设 $A=\{a,b,c\}$. R是A上的二元关系. $R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$.

求 $r(R)$, $s(R)$. $t(R)$

自反闭包 $r(R)=R\cup I_A$ ⇒ 与恒等关系并

对称闭包 $s(R)=R\cup R^{-1}$ ⇒ 与逆关系并

传递闭包 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3 \cdots \cup R^n$

trans　　　$|A|=n$. ^{n}=最多

解. $r(R)=R\cup I_A$

$=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}$

$=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<a,c>,<b,a>\}$

$R^2=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$

$R^3=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}=I_A$　　$R^4=R^3\circ R=I_A\circ R=R$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>,<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,a>,$

$<b,b>,<c,c>\}$.

幂的求法: 关系图、关系矩阵.

日期: /

等价关系和等价类

R是自反的，对称的和传递的，则称R是A上的等价关系

若 $\langle x,y\rangle \in R$，则 $x \sim y$　　以R所有的等价类为元素，则为A的商集

R是等价关系，$x\in A$，x 的等价类 $[x]_R=\{y \mid y\in A \wedge \underline{xRy}\}$

$\langle x,y\rangle \in R$.

设 $A=\{a,b,c,d\}$　A上的关系：$R=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle\} \cup I_A$

$R=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$.

R是自反的.对称的.传递的　∴R是等价关系

$[a]_R=\{b,a\}=[b]_R$

$[c]_R=\{d,c\}=[d]_R$

设R是A上的自反和传递关系，如下定义A上的关系T，使得 $\forall x,y\in A$

$$\langle x,y\rangle \in T \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R$$

证：T是A上的等价关系（T具有自反，对称，传递性）

$\forall x\in A$.　R是自反的　∴ $\langle x,x\rangle \in R \wedge \langle x,x\rangle \in R$

$\Rightarrow$ ∴ $\langle x,x\rangle \in T$　∴T是自反的.

$\forall \langle x,y\rangle \in T$.　有 $\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in T$　∴T是对称的.

即 $\langle y,x\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in T$

$\forall \langle x,y\rangle \in T \wedge \langle y,z\rangle \in T$. 有 $\underline{\langle x,y\rangle \in R} \wedge \langle y,x\rangle \in R$. $\underline{\langle y,z\rangle \in R} \wedge \langle z,y\rangle \in R$

∵R传递　∴ $\langle x,z\rangle \in R$. $\langle z,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in T$　∴T是传递

设R是A的一个自反关系. 证R是一个等价关系, 当且仅当若$<a,b>\in R$. $<a,c>\in R$. 则$<b,c>\in R$

证 "⇒", $<a,b>\in R$ $<a,c>\in R$

对称 $<b,a>\in R$, 传递 $<b,c>\in R$

证 "⇐" R是自反 $\therefore <a,a>\in R$ $\Rightarrow$ $<b,a>\in R$

$\forall <a,b>\in R$. $<b,a>\in R$ $<R,R>$ 对称

$\forall <a,b>\in R$, $<b,c>\in R$ 由R对称, $\forall <b,a>\in R$

$\Rightarrow <a,c>\in R \Rightarrow$ R传递

综上, R是A上的等价关系

偏序关系: R自反. 反对称. 传递 则R为A上的偏序关系, 记作 "≤"

A和A上的偏序关系叫做偏序集, 记作 (A,R)

例: 设 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. R是A上的整除关系

$R=\{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x|y\}$. 证R是偏序关系

$x|y \rightarrow$ 整除

证: 1) $\forall x\in A$, $\because x|x$ $\therefore <x,x>\in R$ $\therefore$ R自反

2) $\forall x,y\in A$. 若$<x,y>\in R$ 即 $x|y$ 成立, 如果 $x\neq y$. 则 $y|x$ 不成立

$\therefore <y,x>\notin R$. R是反对称

3) $\forall x,y,z\in A$. 若$<x,y>\in R$, $<y,z>\in R$. 即 $x|y$. $y|z$. $\therefore x|z \Rightarrow$ 传递

综上, R是A上的偏序关系

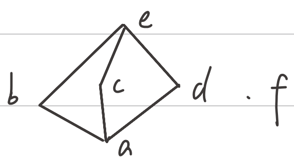
日期：　　/

画偏序集(A,R)的哈斯图，找出A中的极小元，极大元，最大元，最小元

$A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$R=\{<a,d>,<a,c>,<a,b>,<a,e>,<b,e>,<c,e>,<d,e>\}\cup I_A$

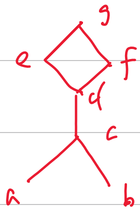
解



极大元 e. f

极小元 a. f

无最大元，最小元



极大元：g　　极小元：a, b

最大元：g　　无最小元

极大(小)元：没有比x大(小)的元素

最大(小)元：所有元素都比x小(大)

} 在A的集合中找

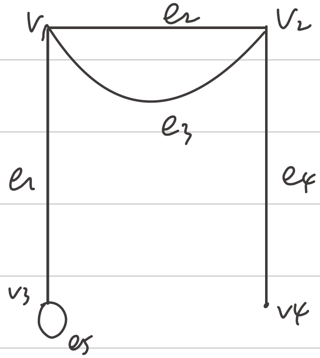
上界、上确界、下界、下确界 — 在集合A中找

上确界：上界中最小的　　下确界：下界中最大的.

日期: /

图的基本概念:

无向图:



$\cdot v_5$

结点 边

$G=(V,E)$

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$G=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$.

关联: e_1 关联结点 v_1,v_3

平行边: $e_2.e_3$

邻接结点: v_1和v_3, v_2和v_4

环: e_5 孤立点: v_5

有平行边的图称为多重图

(多重边)

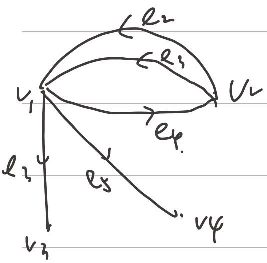
结点度数, $d(v_2)=3$

悬挂结点: v_4 $d(v_4)=1$

悬挂边: e_4.

有向图:

$G=\{V,E\}$.



$E=\{(v_1,v_3),(v_1,v_2),(v_1,v_4),(v_2,v_1),(v_2,v_1)\}$

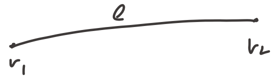
有向边: (v_1,v_2) v_1: 起点 v_2: 终点

平行边: e_2,e_3. 起点与终点要相同

结点 v_1 的出度 $d^+(v_1)=3$ (v_1为起点

结点 v_1 的入度 $d^-(v_1)=2$ v_1为终点)

结点 v_1 的度数 $d(v_1)=d^+(v_1)+d^-(v_1)=5$



Th(握手定理): $G=(V,E)$ 为无(有)向图. G有n个结点, e条边, 则 $\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2e$

推论: 任何图(有向或无向)度数为奇数的结点个数为偶数.

Th: 有向图中 $\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = d^-(v_i) = e$.

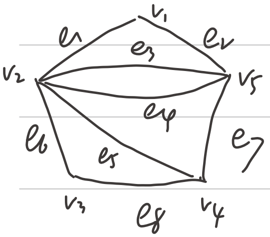
例: G为n阶无向简单图, 若 $\forall v\in V$, 均有 $d(v)=k$, 则称G为 k-正则图. k-正则图的边数为 $\frac{nk}{2}$ 边数 = $\frac{点度数}{2}$ = $\frac{nk}{2}$

结点个数n

n阶: 结点数

简单图: 不含平行边, 不含环

通路与回路和连通的概念:



边数

从v_1到v_4的长度为3的通路

$v_1e_1v_2e_3v_5e_7v_4$

回路: $v_1e_1v_2e_3v_5e_2v_1$

简单通路: 边无重复　　基本通路: 边、点均无重复

/回路　　/回路

def: 若无向图中任意两结点都有一条通路, 则称G是连通图. 否则, G为非连通图.

def: G(V,E)是有向图

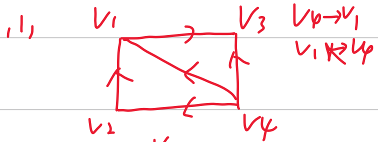
(1) 如果图G任意两结点至少有一个结点到另一个结点是可达的, 则称G是单向连通的

(2) 如果图G任意两结点是相互可达的, 则称G是强连通

(3) 如果图G在略去有向边方向得到的无向图是连通的，则称G是弱连通图

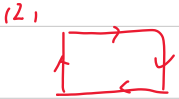
只有以上三种之一，即称为有向连通图.

(1)



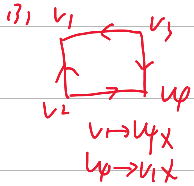
单向连通

(2)



强连通

(3)



例：有向图G如图所示.

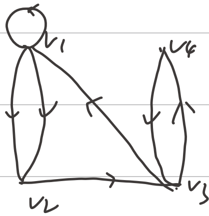
① G中有 v_1 到 v_4 长度为1, 2, 3, 4的通路各几条

② 回路

③ 长度为4的通路有多少条? 回路?

④ 写出G的可达矩阵

⑤ G是哪一类连通图



解：邻接矩阵：　a_{ij}：从 v_i 到 v_j 长度为1的通路数目

A^n：　　n

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&1&0\\1&2&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{pmatrix}$$ ✓

① 0, 0, 2, 2　　② 1, 1, 3, 5

③ 5+6+ - - +1 = 44

④ 5+2+3+1 = 11条

日期: /

④ 可达矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $P_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i - v_j \text{ 可达} \\ 0 & \text{不可达} \end{cases}$

欧拉图、哈密顿图:

def: $G=(V,E)$ 是连通无向图.

通过 G 中所有边一次且仅一次的通路被称为欧拉通路.

通过 G 中所有边一次且仅一次的回路被称为欧拉回路.

具有欧拉回路的图被称作欧拉图;

具有欧拉通路而无欧拉回路的图称作半欧拉图.

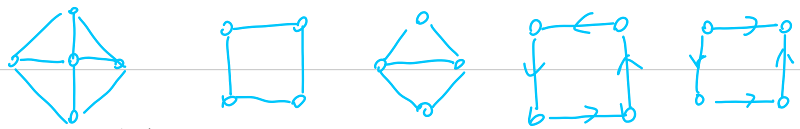
th1: 无向连通图 G 是欧拉图 ⟺ G 中所有结点度数均为偶数.

th2: 无向连通图 G 是半欧拉图 ⟺ G 中只有两个奇度结点

th3: 有向连通图 G 是欧拉图 ⟺ G 中每一个结点的入度 = 出度

th4: 有向连通图 G 是半欧拉图 ⟺ G 中只有两个奇度结点(其中一个结点入度比出度大 1, 另一个结点入度比出度小 1, 其余结点入度 = 出度.

例:



① 不是欧拉/半欧拉 ② 欧拉图 ③ 半欧拉图 ④ 欧拉图 ⑤ 不是欧拉图/半欧拉图

日期:　　　/

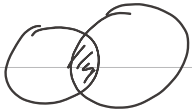
def: $G=(V,E)$ 无向图或有向图. 若G中有一条包含所有结点一次且仅一次的回路, 则称该回路为哈密顿回路. 称图G为哈密顿图

若G中有一条包含G的所有结点的通路, 则称该通路为哈密顿通路. 具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图为半哈密顿图

日期: /

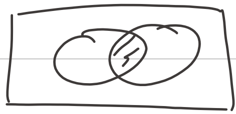
布尔代数:

AB



A+B

德摩根定律: $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$



$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

sum-of-products (sop) 乘积加和.

乘积、

$AB + \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$.

products-of-sums (pos) 加和乘积

$(A+B)(\bar{A}+B)$

标准型: $X = \bar{A}\bar{B} + ABC \rightarrow$

$X = \bar{A}\bar{B}(C+\bar{C}) + ABC$

$= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \underline{ABC}$ 最小项

sop型

日期: /

$X = (\bar{A}+\bar{B})(A+B+C)$ 化为标准型 pos 型.

$= (\bar{A}+\bar{B}+C\bar{C})(A+B+C)$

$= (\bar{A}+\bar{B}+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})(A+B+C)$ 最大项

布尔代数的化简,

$\begin{cases} 1+A=1 \\ A+A=A \end{cases} \Rightarrow B(1+A) = B+AB = B$

例1: $F = A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

$= AC(\bar{B}+B) + AB\bar{C}$

$= AC + AB\bar{C}$

$= A(C+B\bar{C}) = A(C+B)$

例2: $F = \overline{AB} + \bar{A}CD + \bar{B}CD$

$= \overline{AB} + (\bar{A}+\bar{B})CD$

$= \overline{AB} + \overline{AB}CD$

$= \overline{AB}$

卡诺图:

日期: /

逻辑门:

NOT: $X = \text{NOT } A$

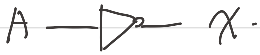
NOT 1 = 0

NOT 0 = 1

真值表:

输入	输出
0	1
1	0

非门:



AND:

1 AND 1 = 1

1 AND 0 = 0

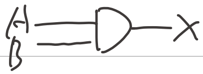
0 AND 1 = 0

0 AND 0 = 0.

$X = A \text{ AND } B.$

$X = 1.$ ($A=1$ 且 $B=1$)

与门:



OR:

1 OR 1 = 1

1 OR 0 = 1

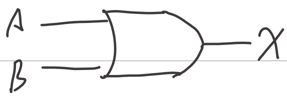
0 OR 1 = 1

0 OR 0 = 0

$X = A \text{ OR } B$

$X = 0$ ($A=0$ 且 $B=0$)

或门:



日期: /

$A \to B$

补:

1. 单射函数: A中任意多个元素不可以指向B中同一个元素

又称为映上函数.

2. 满射函数: B中的元素是否都有箭头指向它

3. 双射函数: 看A和B中元素是不是一一对应

二分图(偶图):

将顶点分成两类 边只存在于不同类的顶点之间. 同类顶点之间没有边,
则图G被称为二分图

有向图G是连通图的充要条件是
图G中有通过每个顶点至少一次的回路.

函数的复合: $f: A \to B$. $g: B \to C$.

$f \circ g: A \to C$ 且 $f \circ g(x) = g(f(x))$

孤立结点既是极大元. 也是极小元

B上A: B^A : $\{f \mid \underbrace{f: A \to B}_{A \to B}\}$ A到B所有函数的集合

日期: /

门电路与组合逻辑电路.

ABCD

1101

一、卡诺图化简:

① 例: $Y = A\bar{B} + \bar{A}C + BC + \bar{C}D$

$\quad\quad 10 \quad\quad 01 \quad\ 11 \quad 01$

②

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	1
11		1	1	1
10	1	1	1	1

包围圈的条件

1. 圈的个数是 2^n

   1, 2, 4, 8, 16 …

2. 圈尽可能的大

3. 圈中至少有一个未被圈过的1

4. 卡诺图是封闭的

③ 画包围圈:

集合的划分:

① $\varphi \notin \pi$

② $\forall x \forall y (x, y \in \pi \land x \neq y \to x \cap y = \varphi)$

③ $\cup \pi = A$

商集A/R就是一个划分.

邻域、关联集 :

无向图:
- 邻域
- 闭邻域
- 关联集

有向图:
- 后继元
- 先驱元
- 邻域
- 闭邻域

日期:　　/

含平行边的图叫多重图. 不含平行边的图叫简单图.

完全图、正则图

子图 补图

点割集. 边割集

有向图的关联矩阵

$p \to q$:

充分:
- 如果p, 则q
- 只要p, 就q
- 因为p, 所以q
- p仅当q

必要:
- 只有q才p
- 除非q才p 或除非q否则非p.

日期:　　/

限制与像:

$F\restriction A = \{\langle x,y\rangle \mid xFy \land x\in A\}$

定义域在A中　　值域

$F[A] = \operatorname{ran}\{F\restriction A\}$