第三节 协方差与相关系数的概念及性质

1. X和Y相互独立

$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

★ X和Y不相互独立

$D(X+Y) = E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2$

$= D(X) + D(Y) + \boxed{2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}$

协方差

$Cov(X,Y)$

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}} \text{ ：相关系数}}$$

(1) ρ_{XY} ：标准协方差．无量纲

为0、可能有其他关系（非线性）

(2) 若X和Y相互独立

$Cov(X,Y) = 0$

① $Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$= E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]$

$= 0$

② $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$= D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y)$

$= D(X) + D(Y)$

4. 协方差的计算公式

(1) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(2) $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y)$

证明: $Cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$

$= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$

5. 性质

(1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

(2) $Cov(aX,bY) = ab\,Cov(X,Y)$

(3) $Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$

例 $X \sim N(1,3^2)$ $\quad Y \sim N(0,4^2)$

$\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$ $\quad Z = \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y$.

(1) 求 Z 的 $E(Z)$. $D(Z)$ $\quad$ (2) 求 X 与 Z 的相关系数

$E(Z) = E(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y)$

$D(Z) = \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + 2Cov(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2})$

$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y) = \rho_{XY}\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}$

$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$

$\rho_{XZ} = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Z)}}$ ✓

$Cov(X,Z) = Cov(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2})$

$= Cov(X, \frac{X}{3}) + Cov(X, \frac{Y}{2})$

$= \frac{1}{3}Cov(X,X) + \frac{1}{2}Cov(X,Y)$

$= \frac{1}{3}(E(X^2) - \cancel{E(X)}^2) = \frac{1}{3}D(X)$

$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 求X与Y的相关系数

$Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\rho$$

(1) 二维正态分布密度函数. ρ — X与Y的相关系数

(2) $\rho=0$. X与Y相互独立

二.相关系数的意义.

$e=E[(Y-(a+bX))^2]$　　e衡量 a+bX 近似表达Y的好坏程度

$$\min_{a,b} e=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时. e较小. X.Y 线性关系联系较紧密

　　　　　　　　小

$\rho_{XY}=0$ 时. X和Y不相关

3. (1) 相互独立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 不相关　($\rho_{XY}=0$, 无线性相关, 但可能有其他关系)

(2) 不相关 $\boxed{1^\circ \quad X,Y\text{不相关} \Leftrightarrow \rho_{XY}=0}$

$\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$

$\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

当X和Y独立时，$\rho=0$，$Cov(X,Y)=0$

$\therefore \rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$

但$\rho=0$并不一定能推出X,Y独立

4. 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}|\leq 1$

(2) $|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow$ 存在常数a,b

使 $P\{Y=a+bX\}=1$

§4.4 矩、协方差矩阵

1. 定义

设X和Y是随机变量，若$E(X^k)$，$k=1,2\cdots$ 存在，称它为X的k阶原点矩，简称k阶矩

数字特征是随机变量函数的数学期望

2. 协方差矩阵

设n维随机变量$(X_1, X_2 \cdots X_n)$的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = Cov(X_i, X_j)$$

$$= E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$$i,j = 1,2 \cdots n$$

都存在，则称矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为n维随机变量的协方差矩阵

协方差矩阵可用来表示多维随机变量的概率密度，从而通过协方差矩阵达到对多维随机变量的研究

设 X 和 Y 是随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^k\}$，$k=2,3,\dots$ 存在，

称它为 X 的 k 阶中心矩。

若 $E(X^kY^l)$，$k,l=1,2,\dots$ 存在，

称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩。

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$，$k,l=1,2,\dots$ 存在，

称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。

5.1 大数定律

导引：①. 当 $n\to\infty$ $f_n(A)\to p$ => 频率稳定性
②. 大数定律：用来阐明大量独立重复试验的平均结果具有稳定性的一系列定理

框架
- 弱大数定律（辛钦大数定律）
  - 两种形式
  - 证明 ← 切比雪夫不等式
  - 应用
- 伯努利大数定律
  - 证明
  - 意义
  - 应用

A. 弱大数定律（辛钦大数定律）

①. $X_1, X_2 \cdots$ 相互独立，服从同一分布，$E(X_k)=\mu\ (k=1,2\cdots)$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$.

②. 证明：

切比雪夫：$1\geq P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

$$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 1\geq P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}\geq 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$$

=> 文字意义：对于独立且同分布 均值为 μ 的 $X_1 \cdots X_n$ 随机变量，当 n 很大时，$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \longrightarrow \mu$.

③. 依概率收敛

由①②⇒ 设 $Y_1 \cdots Y_n$ 是一个随机变量序列，a 为一常数

若对于 $\forall \varepsilon > 0$. 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$

则称 $Y_1 \cdots Y_n$ 依概率收敛于 a

记 $Y_n \xrightarrow{P} a$

⇒引申 $X_n \xrightarrow{P} a$ $Y_n \xrightarrow{P} b$

$g(X_n, Y_n) \xrightarrow[\text{(连续)}]{P} g(a, b)$

④. 弱大数定律（$\bar{X}$ 形式）

$X_1 \cdots X_n$ $\begin{cases} \text{相互独立} \\ \text{同分布} \\ E(X_k) = \mu \end{cases}$ $\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$: $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$

B. 伯努利大数定理

①. $f_A \longrightarrow$ A 发生次数　　$n \rightarrow$ 实验总次数

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$ / $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| > \varepsilon\} = 0$

②. 证: $f_A = \underbrace{X_1 + \cdots + X_n}$ $\begin{cases} \text{相互独立} \\ (1, p) \end{cases}$

$\Rightarrow E(X_k) = p$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - p| < \varepsilon\} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$.

③. 实际意义：当实验次数很大时，可以用事件频率代替事件概率.

定5：（李雅普诺夫）

设随机变量 $X_1 \cdots X_n$ 相互独立，有相同期望与方差

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2)}} \le x\right\} = \phi(x) \sim \cancel{N(0,1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}} \sim N(0,1)$$

定6（棣莫佛－拉普拉斯）

设随机变量 $\eta_n \sim B(n,p)$，$0<p<1$，对 $\forall x$

若 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$

$$\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

$$P\{\eta_n \le x\} = \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

η_n $\underset{\sim}{\eta_n}$ $\sim N(np, np(1-p))$

例：

例：一电压加法器同时收12个噪声电压 V_k $(k=1,2\ldots12)$

相互独立，且 $V_k \sim U(0,10)$，$k=1,2\ldots12$ 总 $V=\sum_{k=1}^{12} V_k$

求 $P\{V>65\}$ 近似　$1-P\{V\le 65\}$

$E(V_k)=5$　　$D(V_k)=\frac{100}{12}=\frac{25}{3}$

$$\frac{V-12\times5}{\sqrt{12\times\frac{25}{3}}} \sim N(0,1)$$

$$1-P\left\{\frac{V-12\times5}{\sqrt{12\times\frac{25}{3}}} \le \frac{65-12\times5}{\sqrt{12\times\frac{25}{3}}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{V-12\times5}{\sqrt{12\times\frac{25}{3}}} \le 0.5\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(0.5)$$

$$=0.3085$$

、供电压10000盏功率相同的灯，夜晚每灯开的概率为0.7

独立，求开灯6900～7100之间概率

设夜晚同时开灯为X 则

$$X \sim B(10000,0.7)$$

$$\frac{X-10000\times0.7}{\sqrt{7000\times0.3}} \sim N(0,1)$$

$$P\{6900\le X\le 7100\}$$

$$=P\left\{\underbrace{\frac{6900-7000}{\sqrt{2100}}}_{-2.18} \le \frac{X-10000\times0.7}{\sqrt{10000\times0.7\times0.3}} \le \underbrace{\frac{7100-7000}{\sqrt{2100}}}_{2.18}\right\}$$

$$\approx \Phi(2.18)-\Phi(-2.18)$$

$$=2\underbrace{\Phi(2.18)}_{0.9854}-1=0.9708$$

6.1. 随机样本.

全部可能的观察值 — 总体.
每个可能的观察值 — 个体.

总体中包含个体的数目 — 容量 {有限总体
无限总体

总体 ~ 样本 (从总体中抽出一部分)

X (总体) $\rightarrow$ $X_1, X_2 \cdots\cdots X_n$ (样本) (容量为n的简单随机样本)
$F(x)$ $\qquad F(x_1), F(x_2) \cdots\cdots$
(且 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 间相互独立)

我们一般使用样本的分布来近似总体的分布

§6.3 抽样分布

一、常用基本概念

统计量：设 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 是其函数。若 g 中不含未知参数，则 $g(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 是一个统计量。

常用统计量：样本均值：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$

样本标准差：$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本k阶原点矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \ k=1,2\cdots$

样本k阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k, \ k=1,2\cdots$

结论：若总体 X 的k阶矩 $E(X^k) \xlongequal{\text{记作}} \mu_k$ 存在，则当 $n \to \infty$ 时，

$A_k \xrightarrow{P} \mu_k, \ k=1,2\cdots$

证明：① $X_1^k, X_2^k \cdots X_n^k$ 独立且与 X^k 同分布，$E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \mu_k$

② 辛钦定理：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k$，$g(A_1, \cdots A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1 \cdots \mu_k)$

二、常见分布

1. χ^2分布

设$X_1, X_2 \cdots X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本，则$\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$服从自由度为n的$\chi^2$分布，记作$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

一定要加!

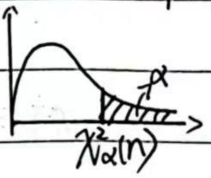
性质：①. 设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$, $\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，且$\chi_1^2, \chi_2^2$独立，则

$\chi_1^2+\chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

(可推广到 $\chi_i^2(i=1,2\cdots m)$ 的情况)

②. 若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$. 则 $E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$

χ^2分布的上α分位点：对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，点$\chi^2_\alpha(n)$满足$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$，称$\chi^2_\alpha(n)$为自由度为n的$\chi^2$分布的上α分位点。

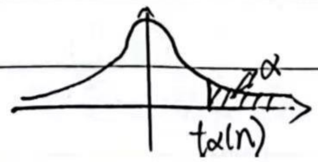


2. t分布

设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$，且X, Y独立，则$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为n的t分布，记作$t \sim t(n)$

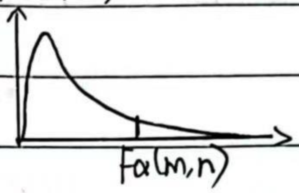
性质：①. t分布的极限分布为标准正态分布$N(0,1)$

②. 若$T \sim t(n)$，则$E(T)=0 \ (n>1)$，$D(T)=\frac{n}{n-2} \ (n>2)$



3. F分布

设 $X\sim\chi^2(m)$, $Y\sim\chi^2(n)$, 且X与Y相互独立, 则 $F=\frac{X/m}{Y/n}$ 服从自由度为(m,n)的F分布, 记作 $F\sim F(m,n)$



重要性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$

三. 四大重要定理.

定理一: 若 $X_1,X_2\cdots X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\bar{X}$ 是样本均值, 则 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

且 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, 此为Z统计量, 在第八章中将使用.

定理二: 若 $X_1,X_2\cdots X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\bar{X}$、S^2 分别是样本均值和样本方差, 则

$$\begin{cases}①.\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) \\ ②.\ \bar{X}与S^2相互独立\end{cases}$$

此定理又名费舍尔定理。

且 $E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=n-1$, $E(S^2)=\sigma^2$, $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

此为 χ^2 统计量.

定理三: 若 $X_1,X_2\cdots X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\bar{X}$, S^2 分别是样本均值和样本方差, 则 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

定理四：若 $X_1, X_2 \cdots X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1, Y_2 \cdots Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且这两个样本相互独立，且 $\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$，$\bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$，$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2$，$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2$，则

① $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$.

② 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，$\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

$\left(S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)$

$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}\right) \Rightarrow \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$.

第七章 参数估计 7.1 点估计

重点：矩估计法、最大（极大）似然估计法。

1. 矩估计法的写法：

(1) 首先：算出 $E(X)$. $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ 或 $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$；

(2) 用 $\bar{X}$ 表示待估的参数。

令 $\bar{X}=E(X)=\varphi(\alpha)$，得出 $\alpha=\psi(\bar{X})$ （$\bar{X}$ 的函数）

(3) $\hat{\alpha}=\psi(\bar{x})$ 就是 α 的矩估计量。若有两参数，还需用 $D(X)=E(X^2)-E(X$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$ 表示；

~~例~~ 2. 最大似然估计法：

(1) 首先：写出样本似然函数；$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ （连乘）

(2) 对数：$\ln L(\theta)=\ln\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

(3) 求导数：$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$，得出 θ 的值；

(4) θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=$ ___ .

例 1. 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha, & -1<x<0\\ \beta, & 0\le x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ α,β 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值：$-0.5, 0.3, -0.2, -0.6, -0.1, 0.4, 0.5, -0.8$

求 α 的矩估计值和最大似然估计值。

分析：此题求 α，故要用 β 表示 α.

$\int_{-1}^{1} f(x,\alpha,\beta)=1=\int_{-1}^{0}\alpha dx+\int_{0}^{1}\beta dx=1$，$\Rightarrow \alpha+\beta=1$.

所以 $\beta=1-\alpha$.

$\Rightarrow f(x,\alpha)=\begin{cases}\alpha, & -1\le x<0\\ 1-\alpha, & 0\le x<1\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$

南京信息工程大学
NanJing University of Information Science & Technology

算 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx=\int_{-1}^{0} x\alpha dx+\int_{0}^{1} x(1-\alpha)dx$

$=-\frac{\alpha}{2}+\frac{1-\alpha}{2}=\frac{1}{2}-\alpha$;

$f(x,\alpha)=\begin{cases}\alpha, & -1<x<0\\ 1-\alpha, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

令 $E(X)=\bar{X}=-\frac{1}{8}$，$\hat{\alpha}=\frac{5}{8}$.

得 α 的矩估计量 $\hat{\alpha}=\frac{5}{8}$. 样本有5个小于0，3个大于0.

(2) 样本似然函数：$L(x_1,x_2,x\cdots x_n;\alpha)=\alpha^5(1-\alpha)^3$.

取对数：$\ln L(x_1,x_2\cdots x_n;\alpha)=5\ln\alpha+3\ln(1-\alpha)$.

对 α 求导：$\frac{d\ln L(x_1,x_2\cdots x_n;\alpha)}{d\theta}=\frac{5}{\alpha}-\frac{3}{1-\alpha}=0 \Rightarrow \hat{\alpha}_2=\frac{5}{8}$.

所以，最大似然估计值为：$\hat{\alpha}_2=\frac{5}{8}$.

2. 设总体 X 服从：$P\{X=x\}=p(1-p)^{x-1}$ $(x=1,2,\cdots)$ p 未知，$0<p<1$.
$X_1,X_2\cdots X_n$ 是取得自总体 X 的样本，求 p 的最大似然估计量.

独立同分布

(1) 样本似然函数：$L(x_1,x_2\cdots x_n;p)=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}$. $(x=1,2\cdots)$

(2) 取对数：$\ln L(x_1,x_2\cdots x_n;p)=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)$

(3) 求导：$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{n(\bar{x}-1)}{1-p}=0$.

$\sum_{i=1}^{n}x_i-n=n\bar{x}-n=n(\bar{x}-1)$

$\Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{\bar{x}}$ 最大似然估计值；

$\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}}$ 最大似然估计量.

7-3 估计量的评选标准

1. 无偏性：$E(\hat{\theta}) = \theta$
   估计量 真实值

2. 有效性：$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$

3. 一致性（相合性）：依概率 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$，$n \to +\infty$.

7-4 区间估计

大前提：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 方法：四大定理

置信区间 (55, 95) 尽量窄

（置信水平）置信度 $1-\alpha$ 90% 把握性 人为定 0.99, 0.95… $\Rightarrow \alpha = 0.01, 0.05$

总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知（用Th1），μ 未知，$X_1, \dots, X_n$ 是样本
求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

选用合适的Th

含 $\bar{X}$ 的：① Th1：$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$
② Th3：$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t(n-1)$
已知 σ^2，就用Th1.

★ Step1：用 $\bar{X}$ 研究 $\mu = E(X)$，用四大定理
由Th1，$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$

Step2：给定 $1-\alpha$ → 统计学中标准正态
$-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$

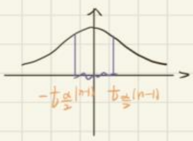
Step3：代入 $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} < \mu < \bar{X} + \underbrace{Z_{\frac{\alpha}{2}}}_{\text{查表}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

题型：
① 求 μ（σ^2 已知）
② 〜〜（一未知）
③ 求 σ^2

若：未知 σ^2.

Step1：由Th3：$T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t(n-1)$



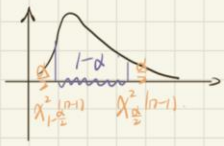
Step2：$-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < T < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Step3：$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \Rightarrow \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}}$

若：求 σ^2 的 $1-\alpha$ 的置信区间

Step1：$S^2 \longrightarrow \sigma^2$
总体方差 样本

由定理2：$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$



Step2：$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Step3：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$

无偏性.

注:若$E(\hat{\theta})\neq\theta$.则称$\hat{\theta}$是$\theta$的偏估计量.

$E(\hat{\theta})-\theta$称以$\hat{\theta}$作为θ估计的系统误差.

相合性.

$\forall \varepsilon>0$.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$$

即 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$

7.4 区间估计

置信区间　　设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ. ($\theta \in \Theta$),

对于定值 α ($0<\alpha<1$) 若由来自 X 的样本 $X_1, X_2 \dots X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2 \dots X_n)$ 和 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2 \dots X_n)$ ($\underline{\theta} < \overline{\theta}$) 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2 \dots X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \dots X_n)\} \geq 1-\alpha$$

称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限　$1-\alpha$ 称为置信水平

(一) 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$　σ^2 已知 μ 未知 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

又 $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计. 且 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

也即　$P\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$

置信区间为 $(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}})$

通法:　(1) 构造样本函数
- ① 取待估参数 不含其他未知量
- ② 分布函数已知
- ③ 尽可能用上总体已知信息

(2)　$P\{a<Z<b\} = 1-\alpha$

a 取下 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点

b 取上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点

③ 计算 组织答案

7.5 正态总体均值与方差的区间估计

单个总体情况

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2 为已知

μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

(2) σ^2 未知

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

2. 方差 σ^2 的置信区间

μ 未知（书中只介绍）

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

∵ S^2 是 σ^2 的无偏估计 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

二、两个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(1) σ_1^2 与 σ_2^2 均为已知

∵ $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$ $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

∴ $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

∴ $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

(2) σ_1^2 与 σ_2^2 均未知　　如果 n_1, n_2 都很大

(3) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$　但未知 σ^2

$\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$.

$$S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}$$

2. 两个总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

∵ $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$ 假设其相互独立.

∴ $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right)$

单侧置信区间

1. 单侧置信区间的定义

对给定值 α ($0<\alpha<1$)，若由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_2)$

$\forall \theta \in \Theta \quad P\{\theta \geqslant \underline{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$

称 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间. $\underline{\theta} \to$ 下限

(同理 $P\{\theta < \overline{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$

$(-\infty, \overline{\theta})$ 单侧置信区间，$\overline{\theta} \to$ 上限)

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

正态总体 X 均值 μ，方差 σ^2

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一个样本. 由 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

有 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即 $P\left\{\mu > \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$

μ - $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$\left(\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty\right)$ (下限)

$\sigma^2 \sim 1-\alpha$ 单置区 $\left(0, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$

§ 58 假设检验

(Hypothesis Testing)

引入：

统计推断：
- 估计问题 §7
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验问题 §8
  - 提出关于总体假设
  - 根据样本作判断

假设检验
- 参数检验：总体分布已知，检验关于未知参数
- 非参数检验：不是对总体参数的假设．

假设总体服从泊松分布 ：非参数

已知总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，假设 $\mu = 50$. 参数

假设检验的基本原理：实际推断原理

小概率事件在一次试验中几乎不可能发生。

依据实际推断原理，对一个假设检验问题，我们要借助某个统计量来构造一个事件 A，使在某假设 H_0 为真的条件下，它发生的概率很小，若 H_0 不真时，A 发生的概率显著地变大。然后根据样本观察值来得知这个小概率事件是否发生了，如果已经发生了，就拒绝 H_0；如果没有发生，就接受 H_0。

假设 H_0 为真 ⟶ 构造统计量 ⟶ A 发生概率很小

样本信息：A 发生　未发生

拒绝 H_0;　接受 H_0.

例 1 某车间用一台包装机包装葡萄糖。袋装糖的净重是一个随机变量，它服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。当机器正常时，其均值为 0.5kg，标准差为 0.015kg。某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖 9 袋，称得净重为(kg)：

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498

0.511　0.520　0.515　0.512

问机器是否正常？

(一)提出假设

对此类检验问题，首先提出假设：

机器正常：　$H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$　称为原假设；

机器不正常：$H_1: \mu \neq \mu_0$　称为备择假设；

(二)两类错误

但是，根据上述 9 个有限的样本值做出 H_0 是否成立的判断永远不可避免地发生如下两类错误：

第一类错误：$\{H_0$ 为真，拒绝 $H_0\}$ 弃真错误

第二类错误：$\{H_0$ 为假，接受 $H_0\}$ 取伪错误

(三)显著性检验

既然上述错误无法排除，我们只能控制发生错误的概率，这里只考虑控制第一类错误的概率的情况(称为显著性检验)，即令

$$P\{H_0 \text{为真，拒绝} H_0\} \le \alpha$$

α 称为显著性水平。

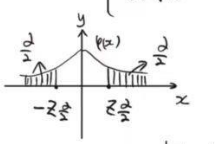
因为$\bar{X}$是μ的无偏估计，若H_0为真，此时$|\bar{X}-0.5|$应该较小。因此在H_0为真的条件下，拒绝H_0应满足$|\bar{X}-0.5|$较大，又H_0为真的条件 $Z=\dfrac{\bar{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

此处的$Z=\dfrac{\bar{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}$称为检验统计量。

可以认为当$\dfrac{|\bar{X}-0.5|}{\sigma/\sqrt{n}}$较大(小概率事件发生)时，可作出拒绝$H_0$的结论，即$\dfrac{|\bar{X}-0.5|}{\sigma/\sqrt{n}}>k$时，拒绝$H_0$，而常数$k$由

$P\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}=P\left\{\dfrac{|\bar{X}-0.5|}{\sigma/\sqrt{n}}>k\right\}=\alpha$

可得$k=z_{\alpha/2}$



故当统计量的观察值满足$|z|=\dfrac{|\bar{x}-0.5|}{\sigma/\sqrt{n}}>Z_{\alpha/2}$时，拒绝$H_0$。

当统计量的观察值满足$|z|=\dfrac{|\bar{x}-0.5|}{\sigma/\sqrt{n}}<Z_{\alpha/2}$时，接受$H_0$。

称$W=\left\{|z|=\dfrac{|\bar{x}-0.5|}{\sigma/\sqrt{n}}>Z_{\alpha/2}\right\}$ 为拒绝域。

拒绝域的边界点$-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}$称为临界点。

综上所述：针对例 1：

假设检验的步骤与方法：

①根据实际问题的要求，提出原假设与备择假设；

②根据假设和题中条件确定检验统计量，并在H_0成立的条件下确定其分布；

③给定显著性水平α，在H_0成立的条件下根据$P\{H_0$为真，拒绝$H_0\}\le\alpha$ 确定拒绝域与临界点；

④由样本值计算出检验统计量值，若该值落入拒绝域，则拒绝H_0，否则接受H_0.

注：例1： $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ未知，σ^2已知.($\sigma^2=0.015$)

显著性水平 $\alpha=0.05$ $H_0: \mu=\mu_0=0.5$， $H_1: \mu\neq\mu_0$

解：① 检验统计量：$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

② 拒绝域： $|z|>z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

③ $n=9$，$\sigma=0.015$，$\mu_0=0.5$，

$z_{0.025}=1.96$， $\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=0.511$

此时z的观察值为 $|z|=2.2>1.96$

故拒绝H_0，即认为包装机工作不正常.

§59 假设检验的基本概念

一、假设检验的基本概念

1. 检验问题的描述

在显著性水平α下，检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \ , \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

H_0称为原假设或零假设；

H_1称为备择假设（在原假设被拒绝后可供选择的假设）。

任务：根据样本，利用上述检验方法在H_0和H_1之间选择一个。

原假设和备择假设选取原则：

(1)应当把大众普遍认为它成立的命题作为原假设。

因为原假设不能轻易拒绝，除非有足够的证据证明它不对。

如：据说跑步有益健康，想知道这是否是真的，因为这是常识，所以应把“跑步有益健康”选作原假设。

(2)应当把分析人员想证明它不正确的命题作为原假设，把分析人员想证明它正确的命题作为备择假设。

如：据说有种新方法能改进生产效率，我们想知道这是否是真的。我们希望这是真的，并努力证明这是真的，所以应把“新方法能改进生产效率”作为备择假设。

2. 检验统计量

根据假设和题中条件确定一个统计量，并在H_0成立的条件下确定其分布，此统计量称为检验统计量。

3. 拒绝域、临界点

当检验统计量取某个区域C中的值时，我们拒绝原假设H_0，则称区域C为拒绝域。

拒绝域的边界点称为临界点。

4. 显著性检验

根据有限的样本值做出H_0是否成立的判断永远不可避免地发生如下两类错误：

第一类错误：弃真错误 $\{H_0$为真，拒绝$H_0\}$

第二类错误：取伪错误 $\{H_0$为假，接受$H_0\}$

既然上述错误无法排除，我们只能控制发生错误的概率，这里只考虑控制第一类错误的概率的情况，称为显著性检验，即令

$$P\{H_0\text{为真，拒绝}H_0\} \le \alpha$$

4. 假设检验的分类

形如 $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu = \mu_0$ 双边检验

形如 $H_0: \mu \le \mu_0$，$H_1: \mu > \mu_0$ 右边检验

形如 $H_0: \mu \ge \mu_0$，$H_1: \mu < \mu_0$ 左边检验。

二、单边检验的拒绝域

设总体服从正态分布$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ未知，σ已知。$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本。给定显著性水平α，求检验问题

$H_0: \mu \le \mu_0$，$H_1: \mu > \mu_0$的拒绝域。右边检验．

解：① $E(\bar{X}) = \mu$；$\bar{X}$是μ无偏估计．σ已知．

检验统计量：$Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

② 拒绝域：

因H_0中的全部μ都比H_1中的μ要小，当H_1为真时，$\bar{x}$的值往往偏大．拒绝域形式：$\bar{x} \ge k$ （k正常数）

确定常数k．

当H_0为真时，$\mu \le \mu_0$

$-\mu \ge -\mu_0$

$\bar{X}-\mu \ge \bar{X}-\mu_0$

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

当$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

必有$\underbrace{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\triangle\triangle}$

$P\{H_0为真拒绝H_0\}$

$= P_{\mu \in H_0}\{\bar{X} \ge k\}$

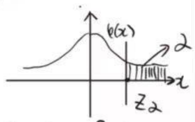
$= P_{\mu \le \mu_0}\left\{\underbrace{\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\triangle}\right\}$

$\le P_{\mu \le \mu_0}\left\{\underbrace{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\triangle\triangle}\right\} \le \alpha$

要控制 $P\{H_0为真拒绝H_0\} \le \alpha$．

只需要 $P_{\mu \le \mu_0}\left\{\underbrace{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\triangle\triangle}\right\} = \alpha$

注意到：$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$．



故 $\dfrac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha$，由此可得 $k = \mu_0 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha$

从而：拒绝域：$\bar{x} \ge k = \mu_0 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha$

拒绝域：$z = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ge z_\alpha$

注：① 左边检验：$H_0: \mu \ge \mu_0$，$H_1: \mu < \mu_0$

拒绝域：$z = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -z_\alpha$．

② 双边检验；左边检验；右边检验．

σ^2已知：μ检验．

1 公司从生产商购买牛奶。公司怀疑生产商在牛奶中掺水以谋利。通过测定牛奶的冰点，可以检验出牛奶是否掺水。天然牛奶的冰点温度近似服从正态分布，均值$\mu_0 = -0.545$℃，标准差$\sigma = 0.008$℃。牛奶掺水可使冰点温度升高而接近于水的冰点温度(0 ℃)。测得生产商提交的 5 批牛奶的冰点温度，其均值为$\bar{x} = -0.535$℃，问是否可以认为生产商在牛奶中掺了水？取$\alpha = 0.05$。

解：在显著性水平$\alpha = 0.05$下，检验假设．

$H_0: \mu \le \mu_0 = -0.545$；$H_1: \mu > \mu_0$ （牛奶掺水）

即求右边检验问题

检验统计量：$Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$．

拒绝域：$z = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha = z_{0.05}$．

$z_{0.05} = 1.645$；$n = 5$；$\bar{x} = -0.535$；$\sigma = 0.008$

代入可得 $z = \dfrac{-0.535-(-0.545)}{0.008/\sqrt{5}} = 2.7951 \ge 1.645$

即z的值落入拒绝域．

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，拒绝H_0；即认为牛奶掺了水．

提出假设：H_0 原假设 H_1 备择假设

弃真错误：H_0为真 拒绝H_0 取伪错误：H_0为假 接受H_0.

显著性检验：$P\{H_0为真 拒绝H_0\} \leq \alpha$. α为显著性水平

检验统计量 $z=\frac{\bar{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}$ 拒绝域 $\left|\frac{\bar{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

单边检验：$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$

$P\{H_0为真拒绝H_0\} = P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k\right\} \leq \alpha$.

拒绝域：$z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$ 左边～ $z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$

双边～：σ^2已知 .μ检验

8.2 正态总体均值的假设检验

(一) 单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验
- ① σ^2 已知，关于 μ 的检验　Z检验 ☆
- ② σ^2 未知，关于 μ 的检验　t检验 ☆

(二) 两个正态总体均值差的检验（t检验）.

(一) ① Z检验

步骤：① 设 $X_1, X_2, \dots X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$x_1, x_2, \dots x_n$ 是 $X_1, \dots X_n$ 的样本观测值，已知显著水平为 α，根据题意给出原假设 H_0 和备择假设 H_1

② 取检验统计量 $\boxed{Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$

③ 确定检验拒绝域

④ 代入数据，计算检验统计量的值.

⑤ 根据实际情况做出判断：接受原假设 or 拒绝原假设.

对于上述步骤的具体说明：

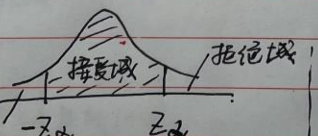
对于步骤1：$H_0: \mu=\mu_0$　$H_1: \mu\neq\mu_0$　双边检验（假设）

$H_0: \mu=\mu_0$　$H_1: \mu<\mu_0$　左边检验

$H_0: \mu=\mu_0$　$H_1: \mu>\mu_0$　右边检验

对于步骤3：

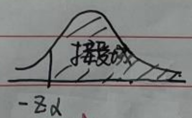
双边假设检验



☆ ☆

$\therefore$ 拒绝域表示为 $\left\{|Z| = \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq Z_{\alpha/2}\right\}$

左边检验



☆

$\therefore$ 拒绝域表示为

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -Z_\alpha$$

(一)② t检验

步骤：① 根据题意给出原假设H_0和备择假设H_1

② 取检验统计量 $\boxed{T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}}$

③ 确定检验拒绝域

④ 代入数据，计算检验统计量的值.

⑤ 根据实际情况做出判断：接受原假设 or 拒绝原假设

对于上述步骤的具体说明.

步骤1： $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu\neq\mu_0$ 双边假设

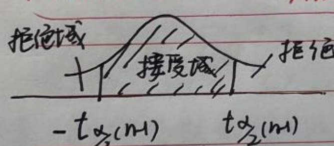
$H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu<\mu_0$ 左边假设

$H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu>\mu_0$ 右边假设

步骤3：

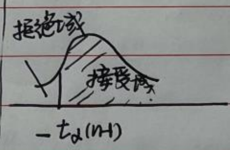
双边假设检验 [自由度为n-1的t分布]

当原假设成立时. $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$



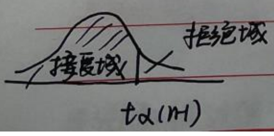
∴拒绝域表示为 $\left\{|T|=\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$

左边假设.



∴拒绝域表示为 $\left\{T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\leq -t_\alpha(n-1)\right\}$

右边假设.



∴拒绝域为 $\left\{T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\geq t_\alpha(n-1)\right\}$

例．要求某种元件的平均使用寿命不得低于1000小时．生产者从一批这种元件中随机抽取25件．测得其平均寿命为950小时．标准差为100小时．已知这批元件的寿命服从正态分布．试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的条件下确定这批元件是否合格．（关键是格式规范）

解：由题意得．原假设 $H_0: \mu \geq \mu_0 = 1000$．备择假设 $H_1: \mu < 1000$

取检验统计量 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$．在 H_0 成立条件下．$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

显著性水平 $\alpha=0.05$．拒绝域为 $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$

代入数据可得．$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(24)=1.7109$　已知 $\bar{X}=950$．$\mu_0=1000$．$S=100$

则 $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=-2.5<-1.7109$

∴ t 落在拒绝域内

∴ 拒绝原假设．认为这批元件平均寿命小于1000小时．

（二）两个正态总体均值差的检验

设 $X_1, X_2, \cdots X_{n_1}$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本　X．Y相互独立．

$Y_1, Y_2, \cdots Y_{n_2}$ 是来自正态总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本．样本均值．样本方差分别为 $\bar{X}$．$\bar{Y}$．S_1^2．S_2^2．设 μ_1．μ_2．σ^2 均未知．．δ为已知常数

步骤：① 根据题意．给出原假设 $H_0: \mu_1-\mu_2=\delta$　备择假设 $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq \delta$．

② 取检验统计量 $T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$　其中 $S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$　$S_w=\sqrt{S_w^2}$

③ 确定检验拒绝域　当 H_0 成立时．$T \sim t(n_1+n_2-2)$

其拒绝域为 $\left|\frac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

④ 代入数据计算　⑤ 做出判断

8.3 正态总体方差的假设检验

知识点：

一、假设检验的步骤

(1) 据题意写出原假设 H_0 和备择假设 H_1

(2) 选择检验方法，写出检验统计量及其分布

(选择合适统计量，写出分布)

(3) 根据给定的显著性水平 (α) 确定拒绝域 (α 常取 0.05)

(4) 计算检验统计量的值，做出推断

假设检验中显著性 $\alpha=0.05$ 的意义：原假设成立，经过检验而被拒绝的概率

二、关于总体的未知参数 θ 的假设检验类型：

类型	H_0	H_1
双边检验	$\theta=\theta_0$	$\theta\neq\theta_0$
单边检验：右边	$\theta\leq\theta_0$	$\theta>\theta_0$
单边检验：左边	$\theta\geq\theta_0$	$\theta<\theta_0$

三、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均未知，$X_1\cdots X_n$ 为总体 X 的样本

(1) 要求检验假设：$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2$，

取 $\chi=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 作为统计量

拒绝域的形式：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq K_1$ 或 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq K_2$

(2) 单边检验问题的拒绝域

右边检验：$H_0: \sigma^2\leq\sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2>\sigma_0^2$.

拒绝域的形式：$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_\alpha(n-1)$

右边检验：$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

拒绝域的形式：$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_\alpha^2(n-1)$

上述检验法称为 χ^2 检验法

四、两个正态总体方差的情况：F检验法

$X_1, X_2, \cdots X_{n_1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本

$Y_1, Y_2 \cdots Y_{n_2}$ 是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本

且两样本独立，

(1) 检验假设：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

拒绝域：$F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$

检验统计量 $F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

(2) 单边问题：

右边检验：$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$　$H_1: \sigma_1 < \sigma_2^2$

拒绝域：$F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

左边检验：$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

拒绝域：$F \geq F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$

上述检验法称为F检验法