

线性代数-知识点总结-23-24 第一学期-版本 1

一、线性方程组的解

1. 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$
 记为 (1), 矩阵形式为 $Ax = b$,

齐次线性方程组: 常数项 b_i 全为零的线性方程组, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$
 记为 (2), 矩阵形式: $Ax = 0$.

称线性方程组 (2) 为线性方程组 (1) 相应的齐次线性方程组, 或称为 (1) 的导出组。

2. 线性方程组解的判定

● n 元非齐次线性方程组 $Ax = b$,

- (1) 无解的充分必要条件是 $R(A) \neq R(\bar{A})$;
- (2) 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(\bar{A}) = n$;
- (3) 有无穷多解的充分必要条件是 $R(A) = R(\bar{A}) < n$. 注意: n 为未知量的个数。

● n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$,

- (1) 只有零解的充分必要条件是 $R(A) = n$;
- (2) 有非零解的充分必要条件是 $R(A) < n$.

✧ 注: 必有 $R(A) \leq R(\bar{A})$, 且若 $R(A) \neq R(\bar{A})$, 则有 $R(\bar{A}) = R(A) + 1$.

✧ 若未知量的个数 n 与方程的个数 m 相等, 此时 A 为方阵, 由克拉默法则, 如果系数

行列式 $|A| \neq 0$, 则解为 $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

3. 求解线性方程组 $Ax = 0$ 的步骤: (必有解, 即零解)

Step1: 系数矩阵 A 经有限次初等行变换等价于行阶梯形矩阵, 得到 $R(A)$, 判断解的情况:

- (1) 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = n$; 只有零解, 结束;
- (2) 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A) < n$. 进入 Step2;

Step2: (S1) 行阶梯形矩阵经有限次初等行变换等价于行最简形矩阵;

(S2) 确定自由变量与非自由变量: 行最简形矩阵中 $r = R(A)$ 个非零首元所对应的未知量作为非自由变量, 其余 $n - r$ 个未知量作为自由变量;

(S3) 确定 $n - r$ 个基础解系: 分别令自由变量 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 代入方程

组得到非自由变量的对应值, 组合后得到 $n - r$ 个基础解系 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$, 则齐次线性方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$, $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

➤ 秩 $R(A)$ (非自由变量的个数) + 基础解系中解向量的个数 (自由变量的个数) = n .

➤ (S3) 中基础解系中解向量的个数为 1 时, 令这个自由变量为 1; 个数为 2 时, 令这 2

个自由变量分别为 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 以此类推。

◆ 例题: 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$
 的通解.

解: 对系数矩阵施行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_3 \times (-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得 $R(A) = 2$, 而 $n = 4$, 故方程组有非零解, 基础解系中解向量个数为 $4 - 2 = 2$ 个.

原方程组的同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$
 取 x_2, x_4 为自由未知量 (一般取行最

简形矩阵非零行的第一个非零元对应的未知量为非自由的), 则有
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得方程组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

则方程组的通解为
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

4. 求解齐次线性方程组 $Ax = b$ 的步骤:

Step1: 增广矩阵 $\bar{A} = (A|b)$ 经有限次初等行变换等价于行阶梯形矩阵, 得到 $R(\bar{A})$ 与 $R(A)$, 判断解的情况:

- (1) 无解 $\Leftrightarrow R(A) \neq R(\bar{A})$; 结束;
- (2) 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) = n$; 进入Step2;
- (3) 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) < n$. 进入Step2;

Step2: 行阶梯形矩阵经有限次初等行变换等价于行最简形矩阵, 得到同解方程组:

- (2) 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) = n$, 直接写出解; 结束;
- (3) 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A) = R(\bar{A}) = r < n$, 进入Step3;

Step3: 确定对应的齐次线性方程组的基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$;

Step4: 确定一个特解: 令自由变量都等于0, 求得非自由变量对应的值, 组合为特解 η^* ;

Step5: 非齐次线性方程组的通解为对应的齐次线性方程组的通解 (基础解系) + 特解, 即 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$

◆ 例题: 求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$$
 的通解.

解: 对增广矩阵施行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & -9 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3, r_2 - 2r_1, \\ r_3 - 2r_1, r_4 - 7r_1 \\ r_3 - r_2, r_4 - 2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

可得 $R(A) = R(\bar{A}) = 2$, 而 $n = 4$, 故方程组有无穷多解.

(1) **Step3:** 先求与原方程对应的齐次线性方程组的基础解系;

由增广矩阵的行最简形(1)知: 相应齐次线性方程组为
$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 + 13x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$
, 即

$$\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 5x_4 \\ x_2 = -13x_3 + 9x_4 \end{cases}, \text{ 令 } x_3, x_4 \text{ 为自由变量, 并取 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{得齐次线性方程组的基础解系为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) **Step4:** 再求非齐次线性方程组的一个特解:

由行最简形(1)知: 非齐次线性方程组等价于
$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 - 5x_4 = -1 \\ x_2 + 13x_3 - 9x_4 = -3 \end{cases}$$
, 即

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4 \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 9x_4 \end{cases}, \text{ 取 } x_3 = x_4 = 0, \text{ 得非齐次线性方程组的特解为 } \eta^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{所以原方程的通解为 } \mathbf{x} = k_1 \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

◆ 例题: λ 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$
 (1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有

无穷多解? 在方程组有无穷多解时写出通解.

解: 对方程组的增广矩阵施以初等行变换化行阶梯形矩阵, 有

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2-r_1, r_3-(1+\lambda)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (3+\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(1) 当 $\lambda = 0$ 时, $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\therefore R(A) = 1, R(\bar{A}) = 2$, 故

方程组无解.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 且当 $\lambda \neq -3$ 时, $\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (3+\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}$

$\therefore R(A) = R(\bar{A}) = 3$, 故方程组有唯一解.

$$\bar{A} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{\lambda}, r_3 \times \frac{1}{-\lambda(3+\lambda)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3-\lambda}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2, r_2+r_3, r_1-(1+\lambda)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

由行最简形矩阵, 可得原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\lambda} \\ x_2 = \frac{2}{\lambda} \\ x_3 = \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases}$.

(3) 当 $\lambda = -3$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore R(A) = R(\bar{A}) = 2 < 3$, 故方程组有无穷个解.

与原方程同解的方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1 = -1 + x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 \end{cases}$.

令 $x_3 = 1$, 则得对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

令 $x_3 = 0$, 则得特解为 $\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 故通解为 $x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, c 为任意常数.

◆ **例题:** 设四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, 且它的三个解 η_1, η_2, η_3 满足 $\eta_1 + \eta_2 = (2, 0, -2, 4)^T, \eta_1 + \eta_3 = (3, 1, 0, 5)^T$. 求该方程组的通解.

解: η_1, η_2, η_3 是方程组的 3 个解, 即 $A\eta_i = b (i = 1, 2, 3)$.

则 $A(\eta_1 + \eta_2) = 2b, A(\eta_1 + \eta_3) = 2b$, 故 $A[(\eta_1 + \eta_3) - (\eta_1 + \eta_2)] = 0, A\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) = b$.

因此 $(\eta_1 + \eta_3) - (\eta_1 + \eta_2) = (3, 1, 0, 5)^T - (2, 0, -2, 4)^T = (1, 1, 2, 1)^T \neq 0, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} =$

$(1, 0, -1, 2)^T$, 分别是齐次线性方程组和非齐次线性方程组的一个解.

又因为四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为3，所以相应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系个数为1. 故齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi =$

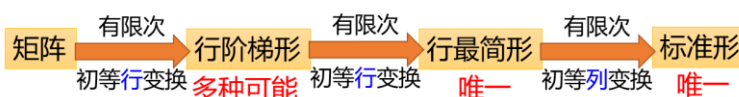
$(1,1,2,1)^T$. 则非齐次线性方程组的通解为 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (k \in \mathbb{R})$.

二、矩阵的秩

1. 定义：设 A 为 $m \times n$ 矩阵，如果存在 A 的 r 阶子式不为零，而任何 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）皆为零，则称数 r 为矩阵 A 的秩，记为 $R(A)$ （或 $r(A)$ ），称上述不为零的 r 阶子式为最高阶非零子式。

- 将矩阵 A 化为行阶梯形矩阵， $R(A)$ 为行阶梯形矩阵中非零行数。
- 行阶梯形：从非零首元开始画阶梯，每个阶梯只有 1 行，阶梯线的下方全为零；
行最简形：非零首元都是 1，非零首元所在列的其余元素都是 0；

$$\text{标准形 } F = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n};$$



- 求矩阵 A 最高阶非零子式的方法：

Step1: 确定矩阵行阶梯形矩阵 A 非零首元所在的列；

Step2: 不改变次序，在 A 中提取对应列，组合为新矩阵 B ；

Step3: 取 B 的 $R(B)$ 行，计算该行列式，若不为 0，则该子式为 A 的最高阶非零子式，若为 0，再取其他 $R(B)$ 行计算。

- ◆ 例题： 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式。

解：用初等行变换将 A 化为行阶梯矩阵： $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，故 $R(A) = 3$ 。

则 A 的最高阶非零子式为 3 阶，且 A 的 3 阶子式共有 $C_4^3 \cdot C_5^3 = 40$ 个。由于初等行变换不改变元素所在的列的位置，故把矩阵 A 按列分块，记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ ，则矩阵

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) \text{ 的行阶梯形矩阵为 } B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故 } R(A) = 3.$$

把矩阵 A 按列分块，记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ ，则矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ 的行阶梯形

矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，故 $R(B) = 3$ 。且 B 的 3 阶子式共有 $C_4^3 \cdot C_3^3 = 4$ 个。在 B 的 4 个 3 阶子式中找到 3 阶非零子式，即为 A 的最高阶非零子式。所以，在 B 的 4 行

中取 3 行，计算得到的 3 阶子式。如取 r_1, r_2, r_3 构成 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq$

0，则此子式为 A 的一个最高阶非零子式。

2. 矩阵秩的相关性质

(1) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}$

证明: 1. 当 $R(A) = n$ 时, 则 $|A| \neq 0$, 进而 $|A^*| \neq 0$, 故 $R(A^*) = n$.

2. 当 $R(A) = n-1$ 时, 则 $|A| = 0$, 但矩阵 A 中至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式. 故 $R(A^*) \geq 1$.

又因为 $AA^* = |A|E = O$, 所以 $R(A) + R(A^*) \leq n$, 故 $R(A^*) \leq n - R(A) = 1$.

3. 当 $R(A) < n-1$ 时, 则矩阵 A 中所有的 $n-1$ 阶子式为零. 则 $A^* = O$. 故 $R(A^*) = 0$.

(2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = O$, 则 $R(A) + R(B) \leq n$.

证明: 将按列分块得: $B = (b_1, b_2, \dots, b_s)$, 由 $AB = A(b_1, b_2, \dots, b_s) = O$ 知: $Ab_i = 0 (i=1, 2, \dots, s)$.

所以的每一列都是 $Ax = 0$ 的解, 而 $Ax = 0$ 的基础解系里含有 $n - R(A)$ 个线性无关的解,

所以 $R(B) \leq n - R(A)$, 即 $R(A) + R(B) \leq n$.

(3) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,

1. $0 \leq R(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$;
2. 若矩阵 $A_{m \times n}$ 中有一个 r 阶子式不为 0, 则 $R(A) \geq r$;
若矩阵 $A_{m \times n}$ 中所有 r 阶子式全为 0, 则 $R(A) < r$;
3. $R(A_{m \times n}) = R(A_{m \times n}^T)$;
4. $R(A) = R(A^T) = R(AA^T) = R(A^T A)$;
5. 对于 n 阶矩阵 A , $|A| \neq 0$ 当且仅当 $R(A) = n$, 称为满秩矩阵;
 $|A| = 0$ 当且仅当 $R(A) < n$, 称为降秩矩阵;
6. $R(A) = A$ 列向量组的秩 = A 行向量组的秩;
7. 若 P, Q 为可逆矩阵 (满秩矩阵), 则 $R(A) = R(PA) = R(AQ) = R(PAQ)$;
8. A 为非零列向量, $R(A) = 1$.
9. $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$.
10. $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.
11. $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.

◆ 例题: 设 A 为 n 阶矩阵满足 $A^2 = A$, 证明 $R(A) + R(E - A) = n$.

证明: 由 $A^2 = A$, 可得 $A(E - A) = O$, 则 $E - A$ 的列向量都是 $AX = O$ 的解, 因而都能由 $AX = O$ 的基础解系线性表示, 故有 $R(E - A) \leq n - R(A)$. 即 $R(A) + R(E - A) \leq n$.

而 $R(A) + R(E - A) \geq R(A + E - A) = R(E) = n$.

所以, $R(A) + R(E - A) = n$.

(4) 若 $A \cong B$ (等价: $PAQ = B$), 则 $R(A) = R(B)$.

(证明两向量组, 由两向量组生成的两向量空间等价, 即证明两者秩相等)

若 $A \simeq B$ (合同: $P^T A P = B$), 则 $R(A) = R(B)$.

若 $A \sim B$ (相似: $P^{-1} A P = B$), 则 $R(A) = R(B)$.

◆ 例题: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B 是 3 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 求 λ .

解: (反证得到 A 不可逆) 若矩阵 A 可逆, 且 $AB = O$, 则 $B = O$.

而 B 是非零矩阵, 矛盾! 所以 A 是降秩矩阵, 即 $R(A) < 3$. 那么

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

要使 $R(A) < 3$, 只有 $\lambda = 3$. (或者利用行列式 $|A| = 0$)

◆ 例题： 设 A 是 4×3 矩阵，且 $R(A) = 2$ ，而 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 $R(AB)$ 。

解：由已知条件可知 B 的秩为3，即为满秩矩阵，则 B 为可逆矩阵，所以由秩的性质可以得出 $R(AB) = R(A) = 2$ 。

三、矩阵关系

1. 等价、合同、相似

$A \cong B$ (或 $A \rightarrow B$): 若矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称 A 与 B 等价;

$A \simeq B$: 设 n 阶矩阵 A, B , 若存在 n 阶可逆矩阵 C , 使得 $C^T A C = B$, 则称 A 与 B 合同;

$A \sim B$: 设 n 阶矩阵 A, B , 若存在 n 阶可逆矩阵 C , 使得 $C^{-1} A C = B$, 则称 A 与 B 相似;

● 等价:

(1) $A \cong B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶初等矩阵 $P_1, \dots, P_l$ 及 n 阶初等矩阵 $Q_1, \dots, Q_t$, 使得 $B = P_1 P_2 \dots P_l A Q_1 Q_2 \dots Q_t$. ($m \times n$ 矩阵 A, B)

(2) n 阶可逆矩阵 P , 有 $P \cong E$.

(3) P 可逆 $\Leftrightarrow P = P_1 P_2 \dots P_m$, 其中 $P_1, P_2, \dots, P_m$ 为 n 阶初等矩阵.

(4) $A \cong B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q , 使得 $B = PAQ$. ($m \times n$ 矩阵 A, B).

● 合同:

$A \simeq B \Rightarrow$ 如果 A 为对称矩阵, 则 B 也为对称矩阵, 且 $R(A) = R(B)$.

$A \simeq B \Leftrightarrow A, B$ 正惯性指数和负惯性指数均相同 $\Leftrightarrow A, B$ 特征值的正项数和负项数相同.

● 相似

$A \sim B \Rightarrow$ 特征值、行列式、迹、秩相等. (迹 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$)

$A \sim B \Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}, kA \sim kB, A^m \sim B^m$.

2. 初等矩阵: 对单位矩阵 E 施以一次初等变换得到的矩阵; 包含以下三种初等矩阵,

$E(i, j)$: 互换矩阵 E 的第 i, j 两行(列);

$E(i(k))$: 将矩阵 E 中的第 i 行(列)乘以非零常数 k ;

$E(i, j(k))$: 将单位矩阵 E 第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 或 E 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上;

➤ 逆矩阵: $E(i, j)^{-1} = E(i, j); E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right); E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k))$.

➤ 转置: $[E(i, j)]^T = E(i, j); [E(i(k))]^T = E(i(k)); [E(i, j(k))]^T = E(j, i(k))$.

➤ 左乘初等矩阵—初等行变换; 右乘初等矩阵—初等列变换;

➤ 初等变换不改变矩阵的秩;

➤ 初等行变换不改变列向量组的线性相关性; 初等列变换不改变行向量组的线性相关性.

◆ 例题: 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2014} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2015}$

解: 令 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 显然 P, Q 为初等矩阵,

且 $P = E(1, 2), Q = E(1, 3)$. 且 $E(1, 2)E(1, 2) = E, E(1, 3)E(1, 3) = E$.

所以 $P^{2014} = E(1, 2)^{2014} = (E(1, 2)^2)^{1007} = E$,

$Q^{2015} = E(1, 3)^{2015} = E(1, 3)^{2014}E(1, 3) = E(1, 3)$.

因此 (做一次 $c_1 \leftrightarrow c_3$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2014} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. 逆矩阵

n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow R(A) = n \Leftrightarrow A$ 的特征值不为0 $\Leftrightarrow A \cong E$;

n 阶矩阵 A 不可逆 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow R(A) < n \Leftrightarrow 0$ 是 A 的特征值。

● 求逆矩阵的方法与矩阵方程

(1) 初等变换法

$$(A|E) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} (E|A^{-1})$$

求解矩阵方程 $AX = B$

$$(A|B) \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} (E|A^{-1}B)$$

求解矩阵方程 $XA = B$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{\text{初等}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

(2) 伴随矩阵法: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵. $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}_n$

● 伴随矩阵的性质: $AA^* = A^*A = |A|E$. $|A^*| = |A|^{n-1}$.

● 逆矩阵的性质: $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ O & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix} \text{分块对角阵, } |A| = |A_1||A_2| \cdots |A_s|, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & O \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix};$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}$$

(类似分块对角阵的形式, 可以这样假设求解)

对角阵 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 若 $\lambda_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $A^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$.

● 二阶矩阵的逆矩阵: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

◆ 例题: 求解矩阵方程 $AX = A + 3X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

解: 先将原方程变形为 $(A - 3E)X = A$, 由于 $A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

且 $|A - 3E| = 1 \neq 0$, 故 $A - 3E$ 可逆. 从而 $X = (A - 3E)^{-1}A$.

$$(A - 3E|A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \therefore X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

◆ 例题: 设方阵 A 满足 $A^2 - 2A + 4E = O$, 求 $(A - 3E)^{-1}$.

解: 由已知条件可得 $(A - 3E)(A + E) = A^2 - 2A - 3E = -7E$, $\therefore (A - 3E) \left[-\frac{1}{7}(A + E) \right] =$

$$E, \therefore (A - 3E)^{-1} = -\frac{1}{7}(A + E).$$

4. 行列式

$$(1) \text{ 范德蒙德行列式: } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

(2) 按行(列)展开与代数余子式:

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(3) 转置倍加值不变; 两行(列)交换值变号; 3 个零: 1 行(列)全为 0; 两行(列)相同/成比例;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{注意: } |kA| = k^n |A|;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|AB| = |A||B|; \quad \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} = |A||B|; \quad \begin{bmatrix} O & B \\ A & O \end{bmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|;$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ O & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix} \text{ 分块对角阵, } |A| = |A_1||A_2| \cdots |A_s|$$

(4) 特殊行列式的计算

- A. 特点: 每列(行)元素之和相等, 解法: 从第 2 行(列)开始, 将所有行(列)加到第一行, 再化为上三角行列式.
- B. 特点: 箭形(爪形), 解法: 利用主(副)对角线元素消去非零行(列)的 $n-1$ 个元素, 成为上三角行列式

◆ 例题: 设 A 为三阶矩阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(2A)^{-1} - 5A^*|$.

$$\text{解: } |(2A)^{-1} - 5A^*| = \left| \frac{1}{2}A^{-1} - 5A^* \right| = |A^* - 5A^*| = |-4A^*| = (-4)^3 |A^*| = (-4)^3 |A|^2 = -16.$$

5. 正交矩阵: 设 A 为 n 阶方阵, 如果 $AA^T = A^T A = E$, 则称 A 为正交矩阵.

◇ n 阶方阵 A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的列(行)向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基.

$$\Leftrightarrow \alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

◇ 设 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 则

(1) $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$;

(2) $A^{-1} = A^T$;

(3) A^T, A^*, A^k (k 是大于 1 的整数) 也是正交矩阵;

(4) AB 也是正交矩阵.

◇ 正交变换: 设 P 是正交矩阵, 则称线性变换 $y = Px$ 为正交变换 (保持向量的长度不变)。

6. **正定矩阵:** (来自二次型—正定二次型, 故必是实对称矩阵)

◇ 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则 A 是正定矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 $n \Leftrightarrow A$ 的特征值都为正 $\Leftrightarrow A \simeq E \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 C 使得 $A = C^T C \Rightarrow |A| > 0$.

◇ 设 A, B 都是 n 阶正定矩阵, 则

(1) A^{-1}, A^T, A^* 也是正定矩阵;

(2) $A + B$ 也是正定矩阵.

◆ **例题:** 设 A 是三阶实对称矩阵, $A^2 + 2A = O$ 且 $R(A) = 2$, 若 $A + kE$ 为正定矩阵, 则 k 的范围是?

解: 令 $Ax = \lambda x$, 由 $A^2 + 2A = O$ 得 $(A^2 + 2A)x = (\lambda^2 + 2\lambda)x = 0$. 所以 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, 即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -2$. 因为 $R(A) = 2$, A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -2$. 于是 $A + kE$ 的特征值为 $k, k - 2, k - 2$. 所以 $A + kE$ 为正定矩阵的充要条件为 $k > 0, k - 2 > 0, k - 2 > 0$, 即 $k > 2$.

四、向量组与向量空间

1. 线性表示

- 向量 β 能由向量组 A 线性表示：给定向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和向量 β ，如果存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

则向量 β 是向量组 A 的线性组合，或称向量 β 能由向量组 A 线性表示。

- ✧ 向量 β 能由向量组 A 线性表示： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ 有解，即 $R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$ 。
- ✧ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关 $\Rightarrow$ 向量 β 能由向量组 A 唯一地线性表示。
- 向量组 B 能由向量组 A 线性表示：设有两向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ ，若 B 组中的每一个向量都能由 A 组线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示；
 - ✧ 向量组 B 能由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow$ 存在矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times s}$ 使得 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)K$ 。
 - ✧ $AB = C, B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s), C = (c_1, c_2, \dots, c_s)$ ，则有 $A\beta_i = c_i$ ，即 B 的每一列都是线性方程组 $AX = c_i$ 的解。
- 两个向量组等价：若向量组 B 与向量组 A 可以相互线性表示，则称这两向量组等价。
 - ✧ 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 K ，使得 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)K$
 $\Leftrightarrow$ 秩相等

2. 向量组的线性相关性

- 线性相关：存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ 。
 线性无关：只有 $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = 0$ 。

	线性相关	线性无关
➤ 判别	方程组有非零解	方程组只有零解
	$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < m$	$R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = m$
	至少有一个向量能由其余向量线性表示	任一向量都不可由其余向量线性表示

- 线性相关
 - (1) 只有一个向量，当 $\alpha_1 = 0$ 时，线性相关；
含有两个向量， α_1, α_2 分量对应成比例，线性相关。
 - (2) 含有零向量的向量组线性相关。
 - (3) $n + t$ 个 n 维向量线性相关($t > 0$)。
 - (4) 原向量组线性相关，增加向量个数后，仍线性相关，即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 也线性相关；
 - (5) 原向量组线性相关，提取每个向量的部分分量，新向量组仍线性相关。
 - (6) $|A| = 0 \Leftrightarrow A$ 的列（行）向量组线性相关。
- 线性无关
 - (1) 只有一个向量，当 $\alpha_1 \neq 0$ 时，线性无关；
 - (2) 原向量组线性无关，减少向量个数后，仍线性无关，即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 也线性无关；
 - (3) 原向量组线性无关，给每个向量的增加部分分量，新向量组仍线性无关。

- (4) $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 的列（行）向量组线性无关。
- 向量组个数与相关性：向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$,
 - ✧ 满足向量组 A 可由向量组 B 线性表示
 - (1) $s > t$, 则向量组 A 线性相关.
 - (2) $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $s \leq t$.
 - ✧ 向量组 A, B 等价且都线性无关, 则 $s = t$.

3. 极大无关组与秩

- 极大无关组：如果向量组 A 中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 满足
 - (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
 - (2) 向量组中任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示（等同于向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关），
 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个极大（最大）线性无关向量组，简称极大无关组.
 - ✧ 向量组的任一极大无关组都与向量组本身等价。（极大无关组不唯一）
- 秩：极大无关组所含向量个数称为该向量组的秩。记为 R_A .
 - ✧ 向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 则 $R_A \leq R_B$
 - ✧ 向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ 秩相等
- 秩与极大无关组的求解方法：对 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 做初等行变换 $\rightarrow$ 行阶梯形，非零行数=秩，非零首元所在列构成一个极大无关组。

4. 向量空间：对加法和数乘运算封闭的向量组

- 向量空间的基 $\Leftrightarrow$ 向量组的极大无关组；向量空间的维数 $\Leftrightarrow$ 秩.
 - ✧ 任意 n 个线性无关的 n 维向量都是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基.
- 两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 生成相同向量空间 $\Leftrightarrow$ 两个向量组等价。
- 向量在某个基下的坐标：设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，对于任意 $\alpha \in V$ ，若有 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r$ ，则称有序数组 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标（唯一），记为 $(x_1, x_2, \dots, x_r)^T$.
- 过渡矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$:

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个基，则由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价，因此存在可逆矩阵 P ，使得 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$ ，称矩阵 P 为从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵.
- 坐标变换公式 $X = PY$ ： X 为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的坐标， Y 向量 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 下的坐标.

5. 内积与正交：

- $[\alpha, \beta]$ 为 α 与 β 的内积： $[\alpha, \beta] = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$;
- $|\alpha|$ 为向量 α 的长度或范数： $|\alpha| = \sqrt{[\alpha, \alpha]} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$;
- 柯西不等式 $|[\alpha, \beta]| \leq |\alpha||\beta|$ ；三角不等式 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.
- 向量 α 与 β 的夹角： $\theta = \arccos \frac{[\alpha, \beta]}{|\alpha||\beta|}, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- 向量 α 与 β 正交： $[\alpha, \beta] = 0$.
- 正交向量组：两两正交的非零向量组；（一定线性无关）
- 正交基：用正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 作为向量空间的一个基；

规范(标准)正交基: 正交基中每个向量都是单位向量; $\Leftrightarrow [\alpha_i, \alpha_j] = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

✧ n 个 n 维的单位坐标向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组规范正交基.

向量 α 在规范正交基下的坐标: $\lambda_i = [\alpha, e_i] (i = 1, 2, \dots, r)$.

● **施密特正交化方法:** 把基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 规范正交化为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$

1. 正交化: 取 $\beta_1 = \alpha_1$, 令 $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1$, $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2$, $\dots$,

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\alpha_r, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_r, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \dots - \frac{[\alpha_r, \beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]} \beta_{r-1}.$$

2. 单位化: 令 $\gamma_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|} (i = 1, 2, \dots, r)$.

五、矩阵的特征值与对角化

1. 特征值与特征向量：设 A 是 n 阶方阵, 如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 α , 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

成立, 则称数 λ 为方阵 A 的一个特征值, 非零列向量 α 为 A 的对应于 (或属于) 特征值 λ 的一个特征向量.

● **求矩阵 A 的特征值与特征向量的步骤:**

Step1: 计算特征多项式 $|A - \lambda E|$;

Step2: 求特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 的全部根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 也就是 A 的全部特征值;

Step3: 对每个特征值 λ_i , 求齐次方程 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的一个基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$ ($k_1, k_2, \dots, k_r$ 是不全为零的任意常数) 为矩阵 A 对应于 λ_i 的全部特征向量.

✧ 方阵 A 的 k 重特征值对应的线性无关的特征向量个数 (基础解系中解向量个数 r) $\leq$ 特征值的重数 k .

➤ **特征值与特征向量的性质**

(1) 一个特征向量只能属于一个特征值; 互异特征值的特征向量必线性无关.

(2) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的 n 个特征值, 则

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, 记 $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, 称为方阵 A 的迹;

2. $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$.

(3) 相关特征值

矩阵	特征值
A	λ
A^T	λ
kA	$k\lambda$
A^m	λ^m
$\varphi(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m$	$a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m$
A^{-1}	$\frac{1}{\lambda} (\lambda \neq 0)$
A^*	$\frac{ A }{\lambda}$

◆ **例题:** 设 A 是 3 阶矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = O$, 已知 A 的迹 $tr(A) = -2$, 求 $|A + 3E|$.

解: 设 α 是其对应于特征值 λ 的特征向量, 则 $A\alpha = \lambda\alpha$.

在 $A^2 + 2A = O$ 的两边同时右乘 α 得 $(A^2 + 2A)\alpha = O$, 有 $(\lambda^2 + 2\lambda)\alpha = O$.

由于 $\alpha \neq O$, 故 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, 因此 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -2$. 即 A 的特征值只能是 0 或 -2.

又因为 A 是 3 阶矩阵, 故 A 必有 3 个特征值, 而 $tr(A) = -2$. 所以 A 的特征值为 0, 0, -2, 进而 $A + 3E$ 的特征值为 3, 3, 1. 故 $|A + 3E| = 3 \times 3 \times 1 = 9$.

2. 矩阵的相似对角化

➤ 可对角化: $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特

征值, 相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 的列向量 p_j 是 A 对应于特征值 λ_j 的特征向量。

✧ n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow k$ 重特征值 λ 对应的线性无关的特征向量个数 r (基础解系中解向量个数) = 特征值的重数 k .

注意: 基础解系中解向量个数 $r + R(A - \lambda E) = n$.

✧ A 有 n 个互异特征值 $\Rightarrow n$ 阶方阵 A 可对角化.

● 矩阵 A 相似对角化的步骤:

Step1: 求 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 重数分别为 $r_1, r_2, \dots, r_m$, 有 $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$

Step2: 对每个 r_i 重特征值 λ_i , 求 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 的基础解系, 若基础解系中解向量个数为 r_i , 则 A 可对角化, 否则 (只要有一个不相等) A 不可对角化.

Step3: 用这 n 个线性无关的特征向量构成可逆矩阵 P , 则有 $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

◆ **例题:** 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 2, 且 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, 求 $R(A - E)$ 和 $R(A - 2E)$.

解: 由题可知: 矩阵 A 可对角化, 故单特征值 1 对应的齐次线性方程组的 $(A - E)x = 0$ 基础解系所含向量个数为 1, 故 $3 - R(A - E) = 1$. 因此 $R(A - E) = 2$. 同理, 二重特征值 2 有 $3 - R(A - 2E) = 2$. 因此 $R(A - 2E) = 1$.

◆ **例题:** 求 A^k . 利用 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 $A = P\Lambda P^{-1}$, $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$.

3. 实对称矩阵的相似对角化

➤ 实对称矩阵

(1) 特征值都是实数;

(2) 不同特征值对应的特征向量必正交;

(3) 必存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, 正交矩阵 Q 列向量是 A 对应于规范正交的特征向量组。

● 实对称矩阵 A 相似对角化的步骤:

在一般矩阵相似对角化的步骤上, 在 Step2 增加 规范正交化 (S1) 对多重特征值的特征向量 (基础解系) 做正交化; (S2) 对所有特征向量 (基础解系) 做 单位化。

六、二次型

1. 二次型、标准形、规范形

二次型: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2$, 矩阵表示 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T Ax$, A 为对称矩阵, 主对角线元素就是二次型中平方项的系数, 其他元素是 $x_i x_j$ 一半。

标准形: 只含有平方项的二次型。

- ◇ 系数不为 0 的平方项项数=二次型的秩。(正项数+负项数=秩)
- ◇ 惯性定理: 不同方法将二次型化为标准形, 会得到不同的标准形, 但这些标准形的正惯性指和负惯性指数都是相等的。
- ◇ 正(负)惯性指数=特征值中正(负)项数=标准形中平方项系数正(负)项数。

规范形: 平方项系数为 1 或 -1 或 0 的标准形。

2. 化二次型为标准形

(1) 正交变换法: 即利用“实对称矩阵 A 相似对角化的步骤”, 变换矩阵为 Q , 标准形为 $f = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。

(2) 配方法: 若有平方项, 则利用完全平方公式配方; 没有平方项, 则利用方差公式

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases} \text{辅助生成平方项再配方。} \\ x_3 = y_3$$

3. 正定二次型

二次型 $f = x^T Ax$, 其中 $A^T = A$:

$f = x^T Ax$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 正定矩阵 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$ 有 $f = x^T Ax > 0$;

$f = x^T Ax$ 负定 $\Leftrightarrow A$ 负定矩阵 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$ 有 $f = x^T Ax < 0$;

$f = x^T Ax$ 半正定 $\Leftrightarrow A$ 半正定矩阵 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$ 有 $f = x^T Ax \geq 0$;

$f = x^T Ax$ 半负定 $\Leftrightarrow A$ 半负定矩阵 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$ 有 $f = x^T Ax \leq 0$;

$f = x^T Ax$ 既不是正定也不负定, 则称 $f = x^T Ax$ 为不定二次型。

● 正定性的判别

- ◇ 对称矩阵 A 是正定矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式均为正 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全为正。
- ◇ 对称矩阵 A 是负定矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正。