

矢量代数与三种常用的正交坐标系

➤ 标量和矢量

标量 A : 大小;

矢量 $\vec{A}$: 大小+方向

单位矢量: $\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$

➤ 矢量的点积与叉积

标积 (点积) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$

矢积 (叉积) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_n AB \sin \theta$ (右手)

➤ 标量三重积

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

➤ 三种常用坐标系

$$\text{直角} \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

$$\text{圆柱} \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases} \begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{球} \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

标量场的方向导数与梯度

➤ 静态场和时变场 (时间)

➤ 方向导数和梯度 (gradient)

方向导数 (标量):

标量场沿某方向的空间变化率

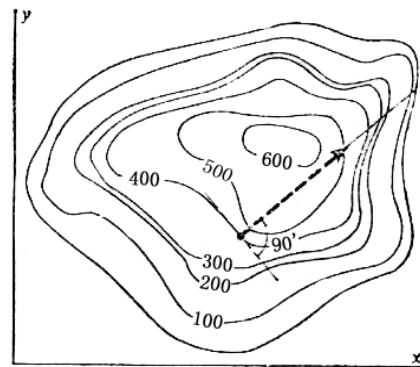
梯度 (矢量):

标量场在某点的最大变化率及其变化最大的方向

方向导数是梯度在该方向上的投影

$$\text{➤ } \text{grad} u = \nabla u = \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \text{ (直角)}$$

➤ 梯度垂直于等值线/面:

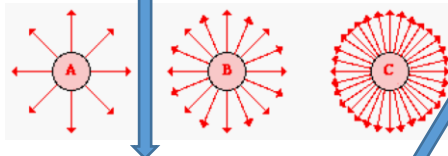


标量场的等值线

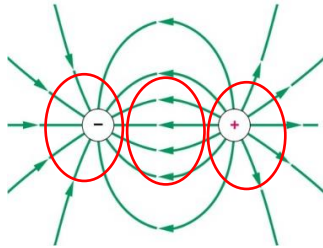
矢量场的通量与散度

- 矢量线：描述矢量场空间分布状态

如何定量描述矢量大小？



- 通量(ψ): $\psi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$



$\psi < 0$ 负源 $\psi = 0$ 无源 $\psi > 0$ 正源

- 散度(divergence): 通量源密度

$$\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \text{ (标量)}$$

- 散度定理(高斯定理 Gauss's Law)

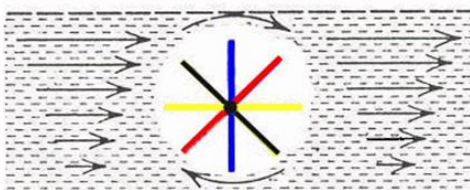
$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

闭合曲面积分 $\leftrightarrow$ 体积分

- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ (直角)

矢量场的环流与旋度

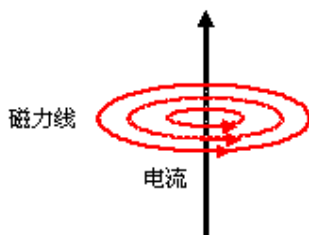
- 环流和旋涡源



通量：突围；环量：包围

环流：矢量对闭合曲线的线积分

电流是磁场的旋涡源



- 旋度(curl): 旋涡源密度矢量

记为 $\text{rot} \vec{F}$ (rotation) 或 $\text{curl} \vec{F}$

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \vec{n} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} \Big|_{\max}$$

- $\nabla \times \vec{F} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{F}$
(直角)

- 梯度 ∇u 、散度 $\nabla \cdot \vec{F}$ 、旋度 $\nabla \times \vec{F}$

- 斯托克斯定理(Stokes' theorem)

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

闭合曲线积分 $\leftrightarrow$ 曲面积分

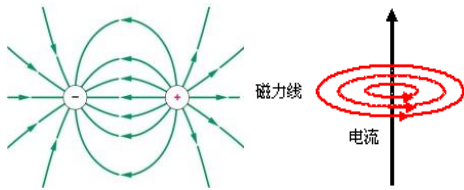
无旋场无散场拉普拉斯运算及亥姆霍兹定理

➤ 无旋场 $\nabla \times \vec{F} \equiv 0$

无散场 $\nabla \cdot \vec{F} \equiv 0$

➤ $\begin{cases} \nabla \times (\nabla u) \equiv 0 & \text{引入标量位} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0 & \text{引入矢量位} \end{cases}$

➤ 散度源：标量；旋度源：矢量



➤ 拉普拉斯 (Laplace) 算符 ∇^2

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{直角})$$

$$\nabla^2 \vec{F} = \vec{e}_x \nabla^2 F_x + \vec{e}_y \nabla^2 F_y + \vec{e}_z \nabla^2 F_z$$

➤ 亥姆霍兹 (Helmholtz) 定理

无界：矢量场由散度及旋度确定

有界：矢量场由散度旋度及边界确定

梯度、散度、旋度对比

	梯度	散度	旋度
先导概念	方向导数	通量	环流
定义 物理意义	大小：标量场在某点的最大变化率 方向：变化最大的方向	通量源密度	旋涡源密度矢量 大小：环流面密度最大值 方向：环流面密度最大值时面元法线方向
公式 定义	$\nabla u = \vec{e}_l \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max}$	$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$	$\nabla \times \vec{F} = \vec{n} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} \big _{\max}$
作用于	标量	矢量	矢量
得到	矢量	标量	矢量
直角坐标系公式	$\nabla u = \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\nabla \times \vec{F} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{F}$