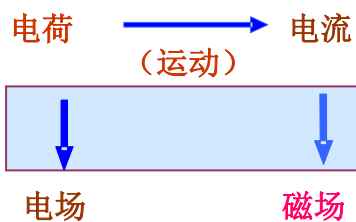


电荷守恒定律(电荷 ρ 、电流密度 $\vec{J}$ 关系)



单位：安培 A (Ampere)

电流密度矢量 $\vec{J}$ (A/m²)、面电流密度矢量 $\vec{J}_s$ (A/m)、线电流 I (A) (线电流元 $I d\vec{l}$ A·m)

➤ 电荷单位：库伦 C (Coulomb)

体分布电荷 ρ (C/m³)、面分布电荷 ρ_s (C/m²)、线分布电荷 ρ_l (C/m)、点电荷 $q\delta(\vec{r} - \vec{r}') (C)$

➤ 电荷守恒定律 (电流连续性方程)

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

➤ 电流强度(简称电流) i ，恒定电流 I

真空中静电场的基本规律

➤ 库仑定律 $\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3}$

与两电荷距离的平方成反比

ϵ_0 真空介电常数 $\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m$

➤ 电场强度矢量 $\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ 单位 V/m

➤ 电偶极子：相距很近、等值异号的点电荷。 z 轴，球坐标系无 E_ϕ 分量

电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$ (单位：C·m)

➤ 静电场的散度

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dV \end{cases} \quad \text{有源}$$

➤ 静电场的旋度 $\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$ 无旋

➤ 静电场是有源无旋场
无旋场又称保守场

真空中恒定磁场的基本规律

➤ 安培力定律

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

μ_0 真空磁导率 $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

➤ 磁感应强度 $\vec{B}$ 单位: Tesla 特斯拉

($\text{T} = \text{Wb/m}^2$)

毕奥--萨伐尔定律:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\text{➤ 恒定场的散度} \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases} \text{无源}$$

➤ 恒定磁场的旋度

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \end{cases} \text{有旋}$$

➤ 恒定磁场是无源有旋场

有旋场又称非保守场

媒质的电磁特性——极化

➤ 媒质对电磁场的响应:

极化、磁化和传导

➤ 介电常数 ϵ 、磁导率 μ 和电导率 σ

➤ $\vec{p} = q\vec{d}$ 电偶极矩(单位: $\text{C}\cdot\text{m}$)

➤ 极化强度矢量 $\vec{P}$: 单位体积中的电

偶极矩矢量和 (单位 C/m^2)

$$\text{➤ } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}, \text{ 代入 } -\nabla \cdot \vec{P} = \rho_p$$

引入 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

➤ 静电场是有源无旋场, 电介质中:

$$\text{微分} \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \text{ 有源} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \text{ 无旋} \end{cases}$$

$$\text{积分} \begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \text{ 有源} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ 无旋} \end{cases}$$

➤ 电位移矢量 $\vec{D}$, 单位 C/m^2

线性和各向同性的电介质中:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad (\epsilon_r \geq 1)$$

媒质的电磁特性——磁化和传导

➤ 磁偶极矩 $\vec{p}_m = i\Delta\vec{S}$ (单位 $\text{A}\cdot\text{m}^2$)

➤ 磁化强度矢量 $\vec{M}$: 单位体积中的磁偶极矩矢量和 (单位 A/m)

➤ $\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_M)$ 代入 $\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$

引入 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ (或 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$)

➤ 恒定磁场是有旋无源场

微分 $\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} & \text{有旋} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{无源} \end{cases}$

积分 $\begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} & \text{有旋} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 & \text{无源} \end{cases}$

➤ 磁场强度 $\vec{H}$, 单位 A/m

线性和各向同性的磁介质中:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H}$$

$$\begin{cases} \mu_r > 1 & \text{顺磁体} \\ \mu_r < 1 & \text{抗磁体} \\ \mu_r \gg 1 & \text{铁磁体} \end{cases} \text{非铁磁物质 } \mu_r \approx 1$$

➤ 线性和各向同性导电媒质:

欧姆定律 (微分形式): $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

σ : 电导率 单位: S/m (西门子/米)

➤ 焦耳定律:

$$\begin{cases} p = \vec{J} \cdot \vec{E} & \text{微分} \\ P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV & \text{积分} \end{cases}$$

电磁感应定律和位移电流

➤ 感应电场是有旋场

➤ 法拉第电磁感应定律 (磁生电):

$$\text{积分: } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{微分: } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

➤ 全电流定律 (电生磁)

$$\text{积分: } \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \vec{J}_d) \cdot d\vec{S}$$

$$\text{微分: } \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_d$$

$$\text{其中位移电流密度 } \vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

麦克斯韦方程组及媒质的本构关系

➤ 两个假设：1 位移电流 2 有旋电场

➤ 麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \text{积分} \quad & \begin{cases} \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dV \end{cases} \\ \text{微分} \quad & \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases} \end{aligned}$$

广义安培环路定律(电生磁)

推广的法拉第电磁感应定律(磁生电)

高斯磁定律(磁场是无散场, 磁通连续)

高斯定律(电荷产生电场)

➤ 各向同性线性媒质的本构关系为

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

➤ 无源空间 $\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$

相互激励制约

电磁场的边界条件

➤ 边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \end{cases}$$

➤ 两种理想介质($\sigma=0$)分界面边界条件

$\vec{D}$ 、 $\vec{B}$ 的法向分量连续(normal)

$\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 的切向分量连续(tangential)

➤ 理想导体($\sigma=\infty$)分界面的边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times \vec{H} = \vec{J}_s \\ \vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{D} = \rho_s \end{cases}$$