

静电场的基本方程、边界条件及电位函数

➤ 场量不随时间变化：静电场、恒定电场和恒定磁场(静磁场)

➤ 静电场：微分
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

➤ 电偶极子 $\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

积分
$$\begin{cases} \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dV \\ \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases} \quad \text{本构 } \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$\vec{p} = q\vec{d}$ 电偶极矩，负→正

➤ 标量泊松方程 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon$

➤ $\vec{E} = -\nabla \varphi$ φ ：标量电位

拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ (无源)

➤ 电位差即电压(U)： $\varphi(P) - \varphi(Q)$

➤ 电位边界条件

其物理意义：电场力将单位正电荷
从 P 点移至 Q 点所做的功

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_s \end{cases}$$

静电场导体系统的电容、静电场能量及静电力

➤ 电容 $C = \frac{q}{U} = \frac{q}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$

单位 F(Farad, 法拉)

➤ 电场力 $\vec{F}_i$ 的作用下发生位移 $d\mathbf{g}_i$

$$\text{恒电位系统 } F_i = \left. \frac{\partial W_e}{\partial g_i} \right|_{\varphi \text{ 不变}}$$

➤ 电场能量 $W_e = \frac{1}{2} \int_v \rho \phi dV$

$$\text{恒电荷系统 } F_i = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial g_i} \right|_{q \text{ 不变}}$$

电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

电场总能量 $W_e = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dV$

导体媒质中的恒定电场

➤ 恒定电场：微分
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

积分
$$\begin{cases} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases} \quad \text{本构 } \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

➤ $\vec{E} = -\nabla \varphi$ φ ：标量电位

拉普拉斯方程： $\nabla^2 \varphi = 0$

➤ 场矢量的边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} J_{1n} = J_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases}$$

➤ 电位边界条件
$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases}$$

➤ 漏电导 $G = \frac{I}{U}$ 绝缘电阻 $R = \frac{U}{I}$

➤ 比拟：

静电场	$\vec{E}$	$\vec{D}$	φ	$\mathbf{q}$	ε	$\mathbf{C}$
恒定电场	$\vec{E}$	$\vec{J}$	φ	$\mathbf{I}$	σ	$\mathbf{G}$

恒定磁场的基本方程、边界条件及矢量磁位

➤ 恒定磁场：微分
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

积分
$$\begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases} \quad \text{本构 } \vec{B} = \mu \vec{H}$$

➤ 边界条件
$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \end{cases}$$

➤ $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ， $\vec{A}$ ：矢量磁位或磁矢位

➤ 矢量泊松方程 $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$

矢量拉普拉斯方程 $\nabla^2 \vec{A} = 0$

➤ $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

➤ 磁矢位边界条件

$$\begin{cases} \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \\ \vec{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 \right) = \vec{J}_s \end{cases}$$

恒定磁场的标量磁位及电感

- 标量磁位拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi_m = 0$ $\Psi = \Psi_i + \Psi_o$ 内磁通量、外磁通量
- 磁位的边界条件 $\begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \end{cases}$ ➤ 自感: $L = \frac{\Psi}{I}$
- 单匝磁链 $\Psi = \Phi$: 磁通量 $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ ➤ 互感: $M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$ 回路 1 对回路 2
- 多匝磁链 $\Psi = \sum_i \Phi_i$ ➤ 纽曼公式 $M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}$

恒定磁场的能量及磁场力

- 磁场能量 $W_m = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} L I^2$ ➤ 磁场力 $\vec{F}_i$ 的作用下发生位移 $d\vec{g}_i$
- $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$ 电流不变 $F_i = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g_i} \right|_{I \text{ 不变}}$
- 磁场能量密度 $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ 磁通不变 $F_i = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial g_i} \right|_{\Psi \text{ 不变}}$
- 磁场的总能量 $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$

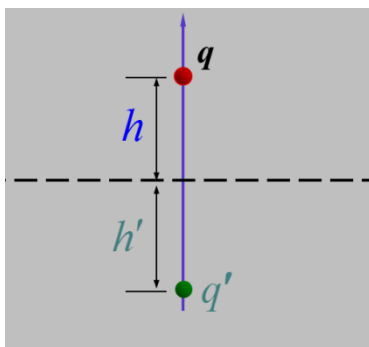
静态场的边值问题及解的惟一性定理

- 边值问题：边界条件下，求解位函数的泊松方程或拉普拉斯方程
- 惟一性定理：给 φ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 的值，泊松方程、拉普拉斯方程有惟一值
- 边值问题类型：
 - 第一类（狄里赫利）：已知边界面上的位函数值
 - 第二类（纽曼）：已知边界面上的位函数的法向导数值
 - 第三类：已知一部分边界面上的位函数值，而另一部分边界面上则已知位函数的法向导数值
- 电荷存在于导体或介质表面附近表面出现感应电荷或极化电荷
- 非均匀感应电位难求解，等效替代
- 像电荷：位于所求解的场区域以外

标量电位	矢量磁位	
$\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$	泊松方程
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \vec{A} = 0$	拉普拉斯方程

镜像法(接地导体平面及球面的镜像)

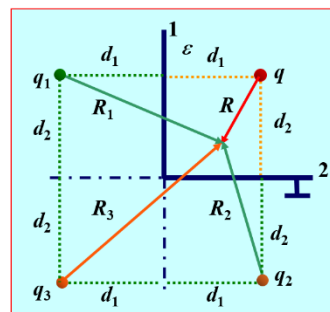
- 点电荷对无限大接地导体平面



$$q' = -q, h' = h$$

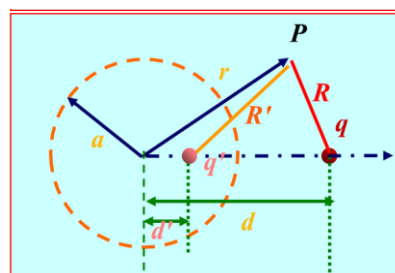
线电荷对无限大接地导体平面

$$\rho_l' = -\rho_l, h' = h$$



$$q_1 = -q, q_2 = -q, q_3 = q$$

- 点电荷对接地导体球面



$$q' = -\frac{a}{d} q \quad d' = \frac{a^2}{d}$$

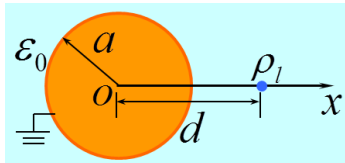
镜像法(不接地球面及导体圆柱面的镜像)

- 点电荷对不接地导体球

$$q' = -\frac{a}{d}q, \quad d' = \frac{a^2}{d}$$

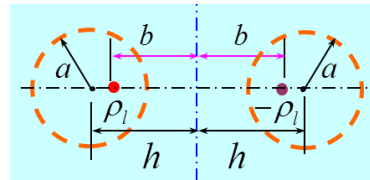
$$q'' = -q' = \frac{a}{d}q, \quad d'' = 0$$

- 线电荷对接地导体圆柱面



$$\rho_l' = -\rho_l, \quad d' = \frac{a^2}{d}$$

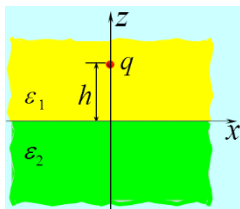
- 两平行圆柱导体的电轴 (电轴法)



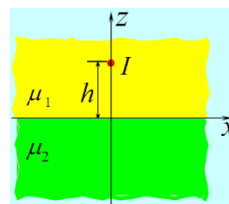
$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

镜像法(介质平面的镜像)及分离变量法

- 点电荷与无限大电介质平面



$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$



$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I, \quad I'' = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

- 线电流与无限大磁介质平面

- 分离变量法理论依据: 惟一性定理
- 求解拉普拉斯方程
- 通解的待定常数由边界条件确定