

波动方程、电磁场的位函数及电磁能量守恒定律

➤ 无源波动方程:
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

➤ $\vec{A}$ 为矢量位 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

ϕ 为标量位 $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$

➤ 位函数规范: 洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

➤ 达朗贝尔方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

➤ 电磁能量守恒的定理: 坡印廷定理

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} =$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

坡印廷定理与惟一性定理

➤ 坡印廷定理:

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

➤ 坡印廷矢量: 电磁能流密度矢量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

➤ 惟一性定理:

$\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 初始值 ($t=0$)

边界面 S 的 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 切向分量 ($t \geq 0$)

电磁场由麦克斯韦方程惟一确定

($t > 0$)

时谐电磁场的复数表示及复矢量的麦克斯韦方程

➤ 时谐电磁场：正弦电磁场

➤ 打“.”的符号表示复数形式

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\dot{\vec{F}}_m(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

➤ 瞬时 $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$ 复矢量

➤ 复矢量的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

复电容率复磁导率亥姆霍兹方程以及位函数

➤ 介质损耗：欧姆损耗、电极化损耗、

磁化损耗

➤ 导电媒质 $\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$

➤ 电介质 $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$

➤ 磁介质 $\mu_c = \mu' - j\mu''$

➤ 损耗角正切 $\tan\delta$ ：介质的损耗特性

虚部与实部之比

➤ 亥姆霍兹方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon})$$

➤ 位函数

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\varphi \end{cases}$$

➤ 洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon\varphi$$

平均能量密度和平均能流密度矢量

➤ 达朗贝尔方程
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

➤ 坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ (W/m²)

➤ 平均能流密度矢量

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{E} \times \vec{H}) dt$$

➤ 平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$