

信号与系统

Signals and Systems

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

课程目录

第1章 信号与系统的基本概念

第2章 连续时间信号与系统的时域分析

第3章 连续时间信号与系统的频域分析

第4章 连续时间信号与系统的复频域分析

第5章 离散时间信号与系统的时域分析

第6章 离散时间信号与系统的 z 域分析

第7章 系统模拟

第8章 系统的状态变量分析

信号与系统

第1章 信号与系统的基本概念

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第1章 信号与系统的基本概念

1.1 信号的描述与分类

1.2 基本信号及其时域特性

1.3 信号的基本运算

1.4 系统的描述与分类

1.5 线性时不变系统的性质

1.1 信号的描述与分类

信号的描述

信号的分类

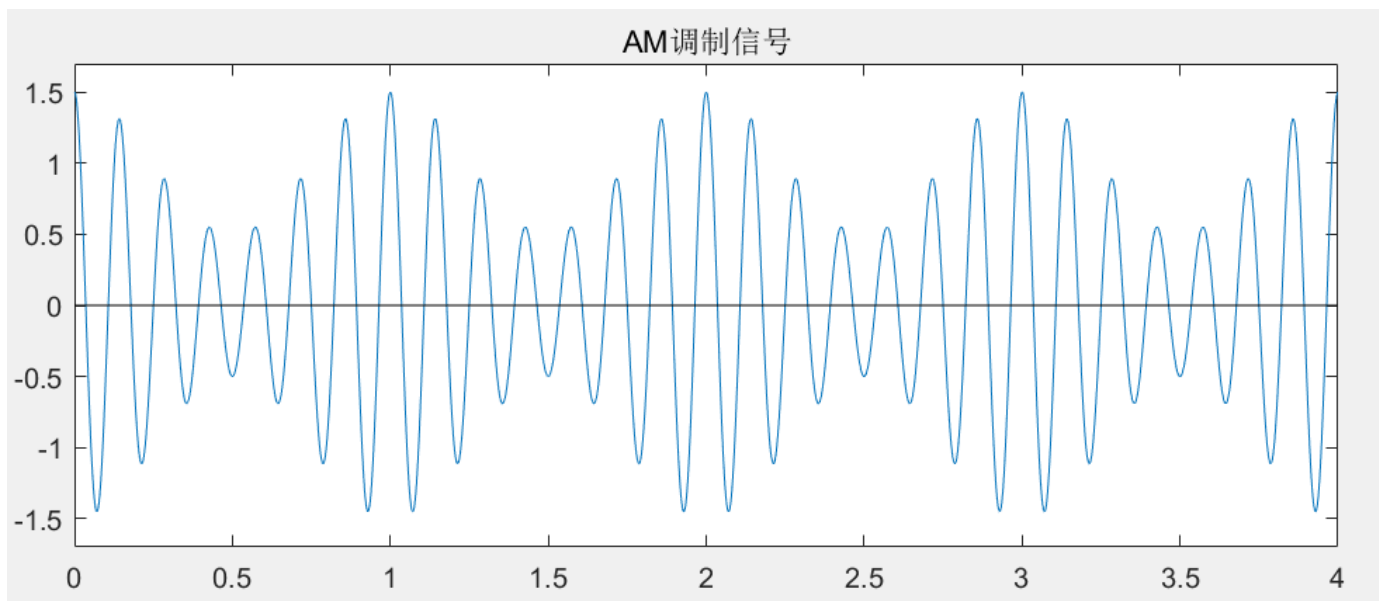
■ 信号的描述

信号可以用函数解析式描述，也可以用波形图描述。

函数解析式

$$s_{\text{AM}}(t) = [A_0 + m(t)] \cos \omega_c t$$

信号波形图



■ 信号的分类

确定信号和随机信号

- 确定信号可以用确定的函数式或者波形表示
- 随机信号不可以用确定的函数式或者波形表示，需要用概率密度、相关函数、谱密度等数学模型进行分析（随机过程）。

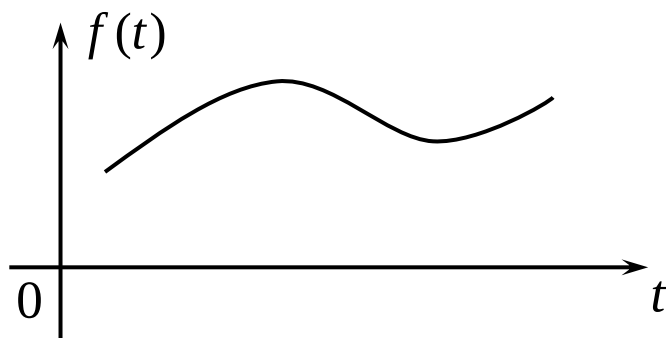
连续时间信号和离散时间信号

名称	时间取值	幅度取值
连续时间信号	连续	可以连续、可以不连续
离散时间信号	离散	可以连续、可以不连续
模拟信号	连续	连续
数字信号	离散	离散

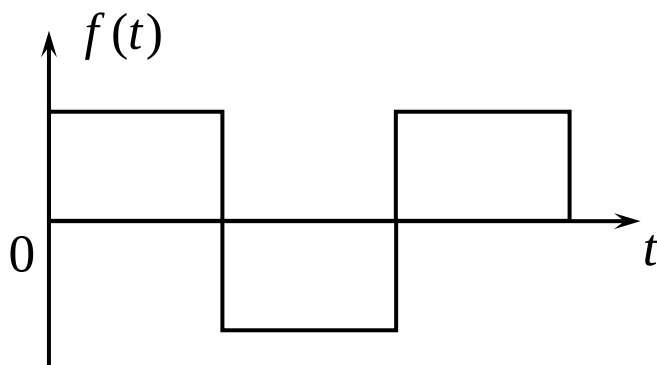
- 时间连续或离散的含义是**定义域的连续或离散**。因此需要和数学中的概念作区分。

■ 信号的分类

连续时间信号

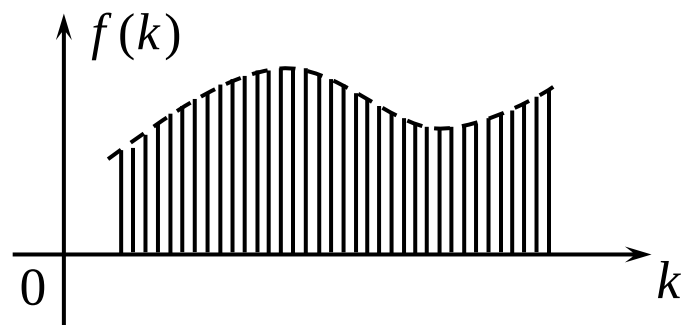


时间连续、幅度连续

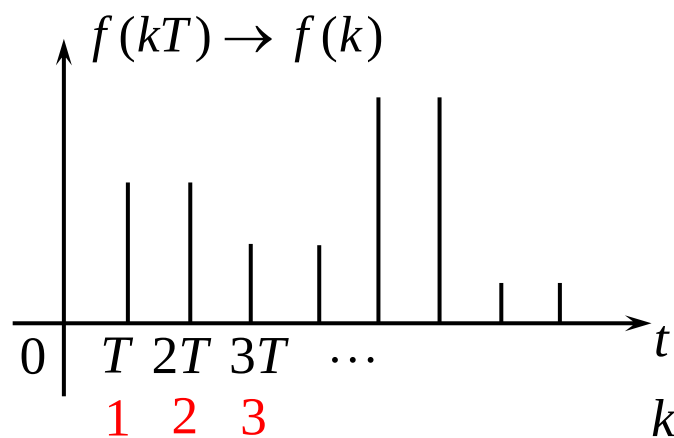


时间连续、幅度离散

离散时间信号



时间离散、幅度连续



时间离散、幅度离散

■ 信号的分类

周期信号和非周期信号

周期信号指的是每隔一定时间 T （或者整数 N ）按相同规律重复变化的信号。

- 连续周期信号： $f(t) = f(t + mT), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 离散周期信号： $f(k) = f(k + mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

非周期信号不具备周期性，令周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号变为非周期信号。

例题1 判断下列信号是否是周期信号，如果是，求其周期。

1) $f(t) = \sin \pi t + 2 \cos 2t$

2) $f(t) = \sin 2t + \cos 3t$

两个连续周期信号之和的周期性判定：

- 若两连续信号周期之比为有理数，设 $T_1/T_2 = P/Q$ ，其中 P 、 Q 为互质的整数，则和信号为周期信号，周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数：

$$T = QT_1 = PT_2$$

- 若两连续信号周期之比为无理数，则和信号为非周期信号。即两个连续周期信号的和不一定是周期信号。

■ 信号的分类

能量信号和功率信号

➤ 信号的能量与功率

设信号的能量为 E ，功率为 P ：

$$\begin{array}{ll} \text{连续信号} \left\{ \begin{array}{l} E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \\ P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt \end{array} \right. & \text{离散信号} \left\{ \begin{array}{l} E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)|^2 \\ P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |f(k)|^2 \end{array} \right. \end{array}$$

➤ 能量信号与功率信号

能量信号：能量为有界值，即 $0 < E < +\infty$ ，此时功率为 $P = 0$

功率信号：功率为有界值，即 $0 < P < +\infty$ ，此时能量为 $E = \infty$

结论： 周期信号都是功率信号，时域有限信号都是能量信号。

例题2 判断下列信号是能量信号还是功率信号，并求能量或功率。

1) $f(t) = 10\cos(3t - \theta)$

2) $f(t) = 10e^{-5t}, t \geq 0$

3) $f(t) = t, 0 \leq t \leq 2$

4) $f(k) = k, 0 \leq k \leq 4$

5) $f(k) = 2, k \geq 0$

6) $f(k) = (-0.5)^k, k \geq 0$

1.2 基本信号及其时域特性

常见连续信号

奇异信号

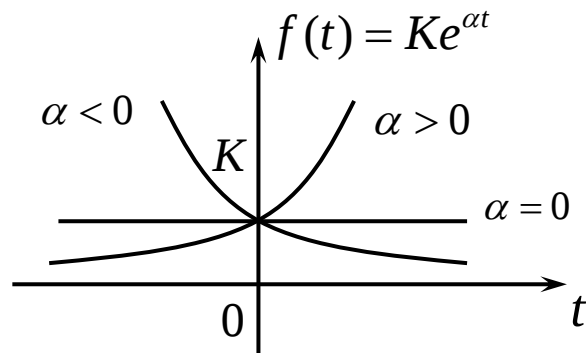
基本离散序列

■ 常见连续信号

指数信号

$$f(t) = Ke^{\alpha t}$$

指数信号对时间求导
积分仍然是指数信号



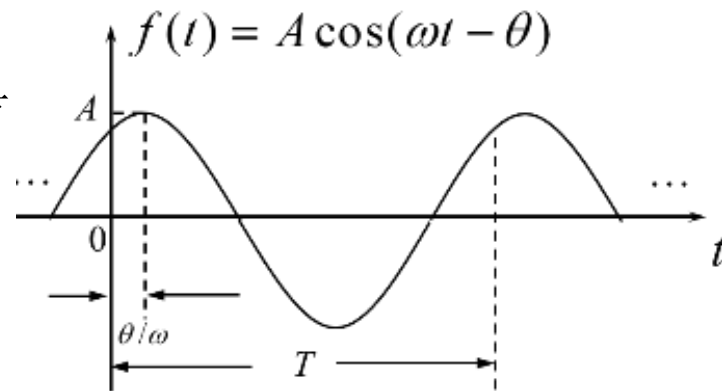
正弦信号 正弦、余弦函数统称为正弦信号

$$f(t) = A\cos(\omega t - \theta)$$

周期 T 、角频率 ω 、频率 f $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

正弦信号对时间求导，积分仍然是正弦信号。

根据欧拉公式
$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$$

■ 常见连续信号

复指数信号

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t}$$
$$= Ke^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

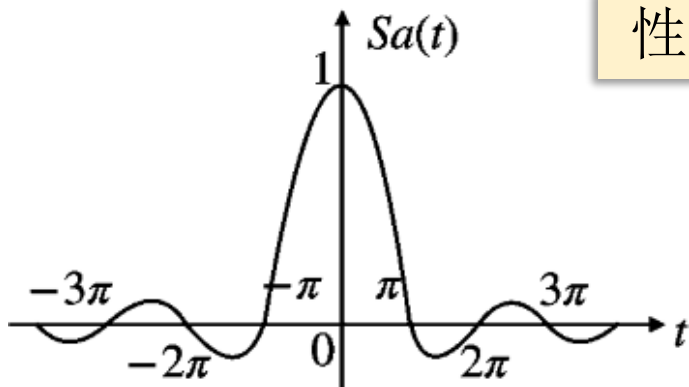
σ 决定增长或衰减

ω 决定振荡的快慢

- $\sigma = 0, \omega \neq 0$: 实部和虚部均为等幅振荡
- $\sigma > 0, \omega \neq 0$: 实部和虚部均为增长振荡
- $\sigma < 0, \omega \neq 0$: 实部和虚部均为衰减振荡
- $\sigma \neq 0, \omega = 0$: 为实指数信号
- $\sigma = 0, \omega \neq 0$: 为虚指数信号
- $\sigma = \omega = 0$: $f(t) = K$ 为直流信号

抽样信号

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} = Sa(t)$$



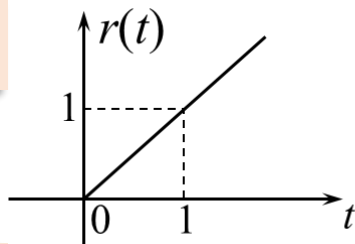
性质

- $Sa(t)$ 为 t 的偶函数
- $\lim_{t \rightarrow 0} Sa(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Sa(t) = 0$
- 过零点: $t = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$
- $\int_0^{+\infty} Sa(t) dt = \int_{-\infty}^0 Sa(t) dt = \frac{\pi}{2}$

■ 奇异信号

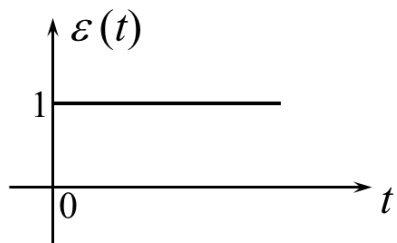
函数本身或其导数、积分有不连续点（即跳变点）的信号。

单位斜变信号 $r(t)$

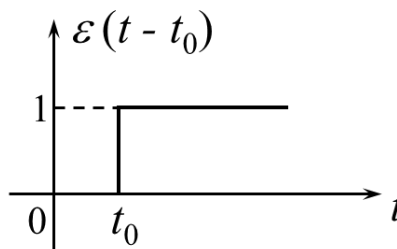


$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$



$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



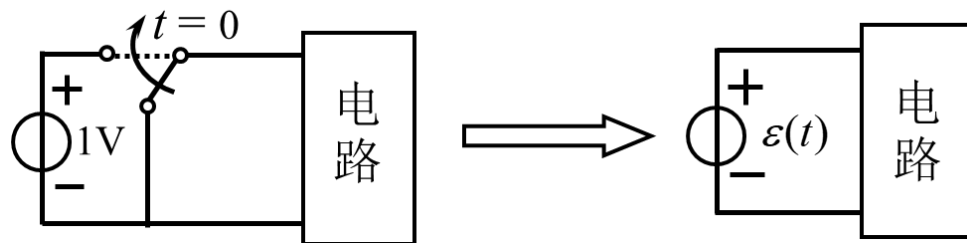
$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

在 $t = 0$ 处函数值无定义，
也有些教材定义 $t = 0$ 处的
函数值为 $1/2$ 。

$$r(t) \text{ 与 } \varepsilon(t) \text{ 的关系: } r(t) = t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \frac{dr(t)}{dt}, \quad r(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(x)dx$$

■ 奇异信号

单位阶跃信号的物理意义

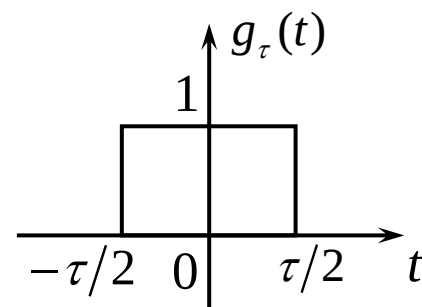


阶跃函数描述了信号的**接入特性**。

- $\varepsilon(t)$ 表示信号 $f(t)=1$ 在 $t=0$ 时刻接入系统
- $f(t)\varepsilon(t)$ 表示信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 时刻接入系统
- $f(t)\varepsilon(t-t_0)$ 表示信号 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 时刻接入系统

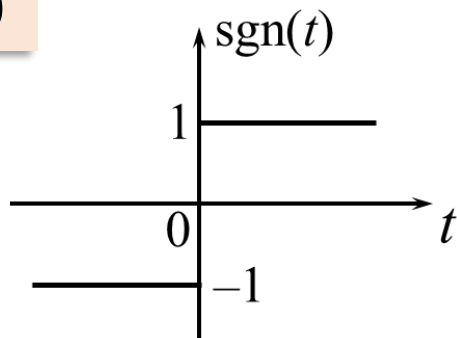
体现在波形上为跳变点或者波形的起始和终止

宽度为 τ 的门函数



$$g_{\tau}(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

符号函数 $\text{sgn}(t)$



$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

例题3 根据信号的函数解析式作出信号的波形图。

1) $f(t) = r(\sin t)$

2) $f(t) = \varepsilon(\cos \frac{\pi}{2} t)$

3) $f(t) = \text{sgn}(t^2 - 4)$

4) $f(t) = r(2 - t)\varepsilon(t)$

5) $f_1(t) = t\varepsilon(t - 1)$, $f_2(t) = (t - 1)\varepsilon(t - 1)$, $f_3(t) = (t - 1)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 3)]$

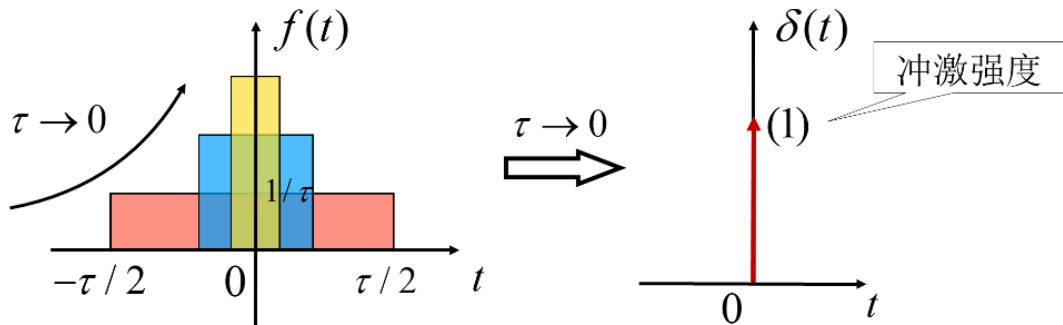
■ 奇异信号

单位冲激信号 $\delta(t)$

引入

矩形脉冲可视为作用效果（面积）一定，作用时间与作用力大小成反比的力。矩形脉冲持续时间减小，要维持力效果不变，则需要增大脉冲的幅度。

单位冲激信号就可以视为作用效果不变，但是作用时间无限小，从而大小无限大的一个力，取脉冲持续时间趋于0，就可以得到单位冲激信号。



记宽度为 τ ，幅度为1的矩形脉冲为门函数 $g_\tau(t)$ ，则冲激信号的定义为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} g_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

■ 奇异信号

单位冲激信号 $\delta(t)$

定义

➤ 物理定义
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} g_{\tau}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

➤ 狄拉克定义
$$\delta(t): \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases} \quad \delta(t-t_0): \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \\ \delta(t-t_0) = 0, t \neq t_0 \end{cases}$$

➤ 广义函数定义
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \varphi(t) dt = \varphi(t_0) \end{cases}$$

广义函数定义： $\delta(t)$ 作用于检验函数 $\varphi(t)$ 的效果是给 $\varphi(t)$ 赋 $\varphi(0)$ 的值；同理， $\delta(t-t_0)$ 作用于检验函数 $\varphi(t)$ 的效果是：给 $\varphi(t)$ 赋 $\varphi(t_0)$ 的值。

■ 奇异信号

单位冲激信号 $\delta(t)$

性质

➤ 奇偶性 冲激信号为偶函数: $\delta(-t) = \delta(t)$

➤ 与普通函数相乘
$$\begin{cases} f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \\ f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

➤ 取样性质
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0)dt \begin{cases} f(t_0), & t_0 \in [t_1, t_2] \\ 0, & t_0 \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

➤ 尺度变换性质 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (a \neq 0) \quad \delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

➤ $\delta(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 关系 $\delta(t) = \frac{d}{dt}\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at-t_0)dt = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t_0}{a}\right)$$

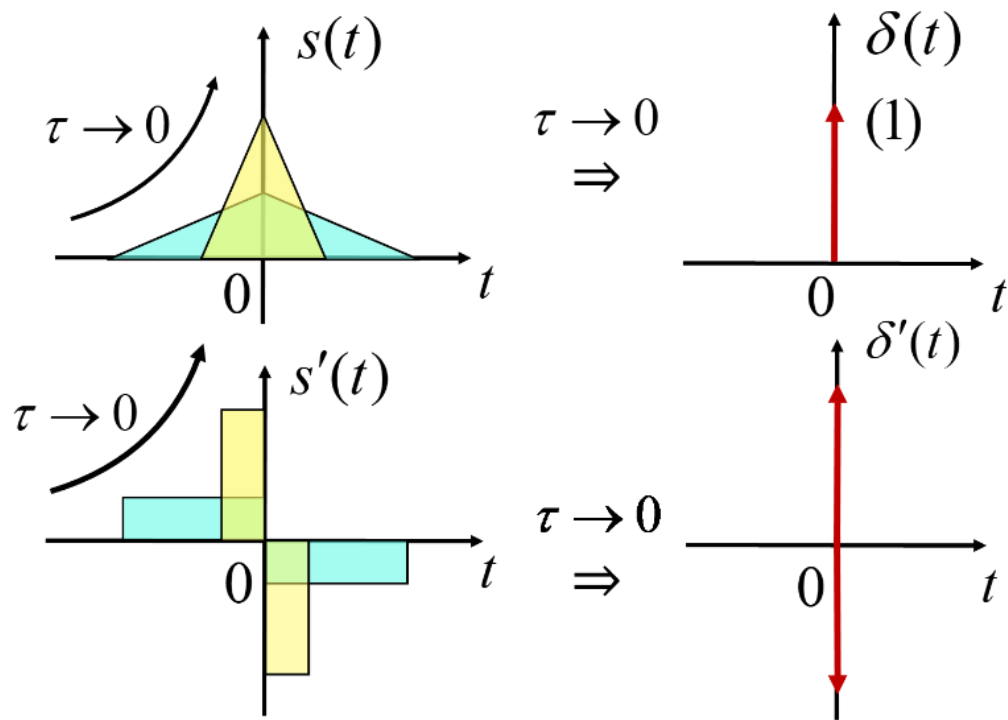
若信号的函数值有跳变, 则信号在跳变点处的导数为冲激信号, 其冲激强度为信号在跳变点处的跳跃值。

■ 奇异信号

冲激偶信号 $\delta'(t)$

定义

冲激偶信号为冲激信号对时间的导数，即： $\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$



■ 奇异信号

冲激偶信号 $\delta'(t)$

性质

➤ 奇偶性 冲激偶信号为奇函数 $\delta'(-t) = -\delta'(t)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) dt = 0$

➤ 与普通函数相乘
$$\begin{cases} f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \\ f(t)\delta'(t-t_0) = f(t_0)\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

$$[f(t)\delta(t)]' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t) \quad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad f'(t)\delta(t) = f'(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t) = [f(0)\delta(t)]' - f'(0)\delta(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

➤ 取样性质
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t) dt = -f'(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t-t_0) dt = -f'(t_0) \end{cases}$$

➤ 尺度变换性质 $\delta'(at) = \frac{1}{a|a|} \delta'(t) \quad (a \neq 0)$

例题4 完成下列与冲激信号和冲激偶信号有关的计算。

1) $e^{-2t}\delta(2t+4)$

2) $e^{-3t}\delta'(t)$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{t} \delta(t) dt$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} (2t-3)\delta'(t) dt$

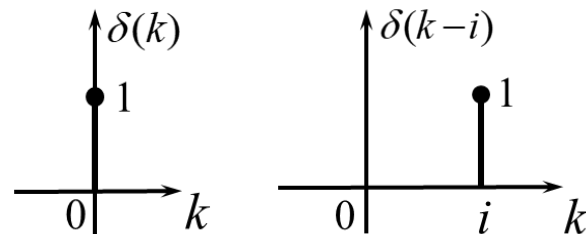
5) $\int_{-2}^2 \cos \frac{\pi t}{2} [\delta'(t-1) + \delta(t+5)] dt$

6) $\int_{-\infty}^t (1-\tau)\delta'(2\tau) d\tau$

■ 基本离散序列

单位序列 $\delta(k)$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \delta(k-i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

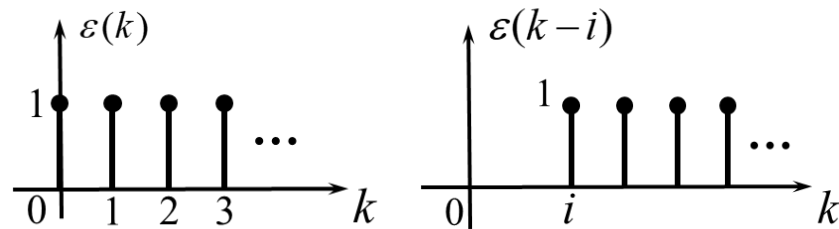


$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k) \quad f(k)\delta(k-i) = f(i)\delta(k-i)$$

辨析： $\delta(k)$ 在 $k=0$ 处值为 1； $\delta(t)$ 在 $t=0$ 处幅度为无穷大。

单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \varepsilon(k-i) = \begin{cases} 1 & k \geq i \\ 0 & k < i \end{cases}$$



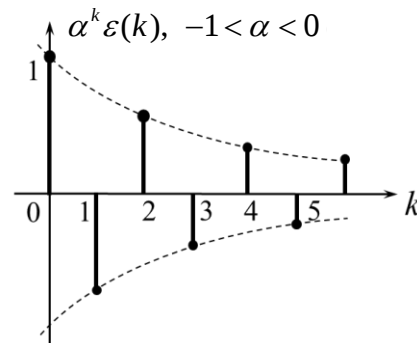
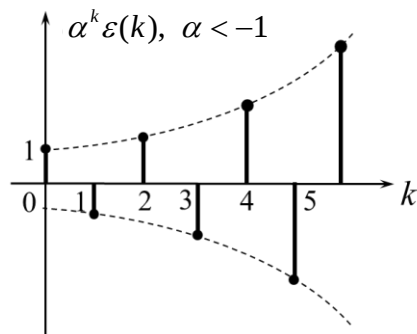
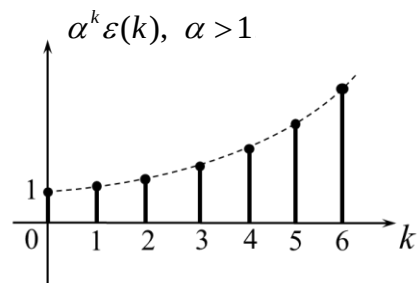
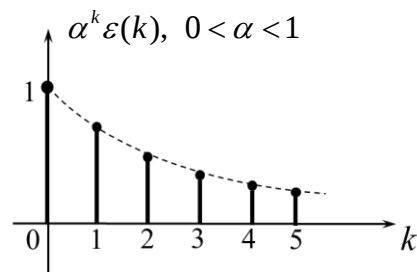
$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) \quad \varepsilon(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i)$$

辨析： $\varepsilon(k)$ 在 $k=0$ 处有定义，值为 1； $\varepsilon(t)$ 在 $t=0$ 处无定义或取 1/2。

基本离散序列

单边指数序列

$$f(k) = \alpha^k \varepsilon(k), k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} |\alpha| > 1 \text{ 时, 发散} \\ |\alpha| < 1 \text{ 时, 收敛} \\ \alpha > 0 \text{ 时, 恒正} \\ \alpha < 0 \text{ 时, 正负交错} \end{cases}$$



复指数序列

$$f(k) = e^{(a+j\omega_0)k} = e^{ak} e^{j\omega_0 k} = \alpha^k e^{j\omega_0 k} = \alpha^k [\cos \omega_0 k + j \sin \omega_0 k] (\alpha = e^a)$$

$$\text{对 } \alpha, \omega_0 \text{ 讨论: } \begin{cases} \alpha = 1: \text{ 实部和虚部均为等幅正弦序列} \\ \alpha > 1: \text{ 实部和虚部均为增长正弦序列} \\ \alpha < 1: \text{ 实部和虚部均为减幅正弦序列} \\ \omega_0 = 0: \text{ 为指数序列} \\ \alpha = 1, \omega_0 = 0: f(k) \text{ 为常数序列} \\ \alpha = 1, \omega_0 \neq 0: f(k) \text{ 为虚指数序列} \end{cases}$$

■ 基本离散序列

正弦序列

$$f(k) = \cos \omega_0 k, \quad \omega_0 \text{称为数字角频率}$$

正弦序列可视为正弦信号的采样

$$\begin{array}{ccc} \text{连续正弦信号} & \xrightarrow{\text{采样}} & \text{离散正弦序列} \\ \cos \Omega_0 t & & \cos \Omega_0 t \Big|_{t=kT} = \cos \Omega_0 T k = \cos \omega_0 k \end{array}$$

辨析：模拟角频率与数字角频率

$$\begin{array}{ccc} \text{模拟角频率 } \Omega_0 & \xrightarrow[\text{采样周期 } T]{\omega_0 = \Omega_0 T} & \text{数字角频率 } \omega_0 \end{array}$$

$$\omega_0 = \Omega_0 T = 2\pi \frac{T}{T_0} = 2\pi \frac{f_0}{f_s}$$

数字角频率是一个相对量，单位为rad，可根据模拟角频率和采样周期确定。

■ 基本离散序列

正弦序列与虚指数序列的周期性

$$f(k+N) = \begin{cases} \cos \omega_0(k+N) = \cos(\omega_0 k + \omega_0 N) \\ e^{j\omega_0(k+N)} = e^{j\omega_0 k} \cdot e^{j\omega_0 N} \end{cases}$$

$$f(k) = f(k+N) \Rightarrow \omega_0 N = 2m\pi \quad N = m \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad m \text{ 和 } N \text{ 必须为整数}$$

- $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，取 $m=1$ ，正弦/虚指数序列为周期序列，周期 $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ；
- $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数时，设 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{P}{Q}$ ， P 、 Q 为互质的整数，取 $m=Q$ ，则正弦/虚指数序列为周期序列，周期 $N = P$ ；
- $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时，不存在整数 N ，正弦/虚指数序列不具备周期性。

例题5 判断下列序列是否是周期序列，如果是，求其周期。

1) $f(k) = 5\cos 4k$

2) $f(k) = \cos \frac{3\pi}{4}k + \cos \frac{2\pi}{3}k$

3) $f(k) = \cos \frac{\pi}{3}k + e^{j\frac{2\pi}{5}k}$

➤ 若两周期序列周期之比为有理数，设 $N_1/N_2 = P/Q$ ，其中 P 、 Q 为互质的整数，则和序列为周期序列，周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数：

$$N = QN_1 = PN_2$$

序列的周期必为整数，故两个离散周期序列之和一定是周期序列。

1.3 信号的基本运算

■ 信号的基本运算

信号的加法、乘法

$$f_1(\bullet) \pm f_2(\bullet) \pm \cdots f_n(\bullet) \quad f_1(\bullet) \times f_2(\bullet) \times \cdots \times f_n(\bullet)$$

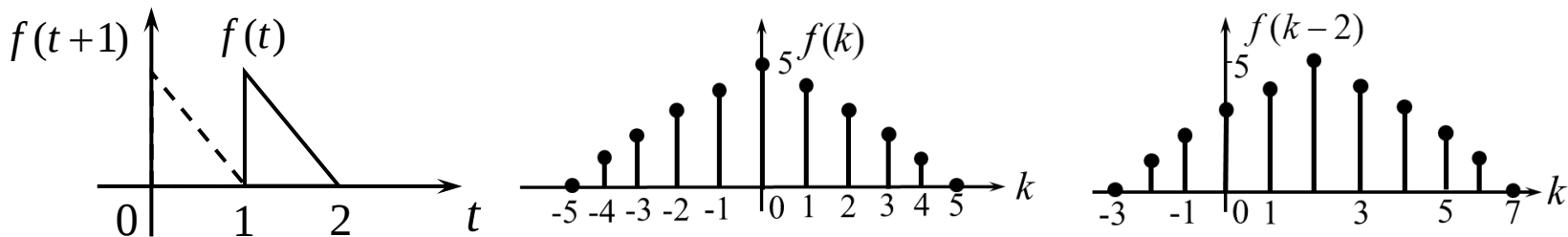
必须把同一时刻的值相加或相乘

信号的平移

$f(t) \rightarrow f(t-t_0)$ 或 $f(k) \rightarrow f(k-k_0)$ 时, $f(\bullet)$ 右移 t_0 或 k_0

$f(t) \rightarrow f(t+t_0)$ 或 $f(k) \rightarrow f(k+k_0)$ 时, $f(\bullet)$ 左移 t_0 或 k_0

记忆方法: 左加右减自变量。

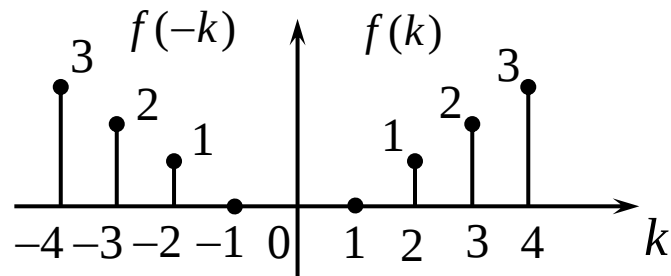
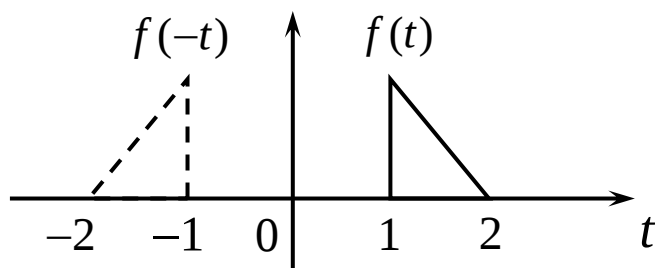


■ 信号的基本运算

信号的反转（反折或反褶）

$$f(t) \rightarrow f(-t) \text{ 或 } f(k) \rightarrow f(-k)$$

把原信号以纵坐标为轴旋转 180°

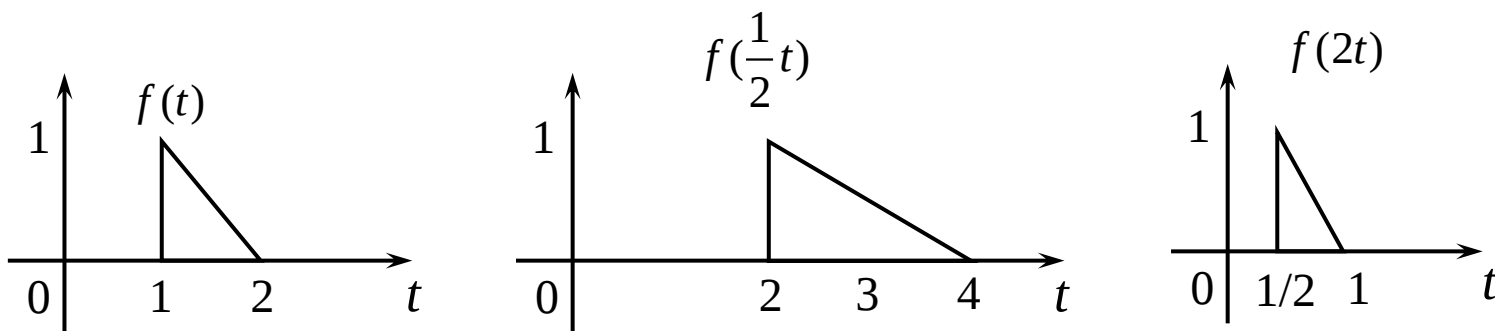


■ 信号的基本运算

信号的尺度变换（横坐标展、缩）

$$f(t) \rightarrow f(at) \begin{cases} a > 1 \text{ 时, 把原信号以原点为基准压缩 } a \text{ 倍} \\ 0 < a < 1 \text{ 时, 把原信号以原点为基准扩展 } 1/a \text{ 倍} \\ a < 0 \text{ 时, 除尺度变换以外还包含反转运算} \end{cases}$$

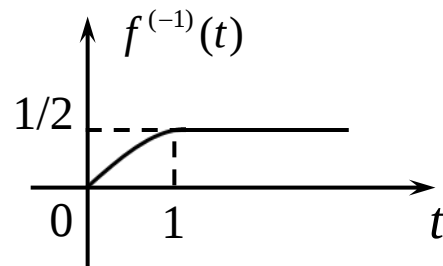
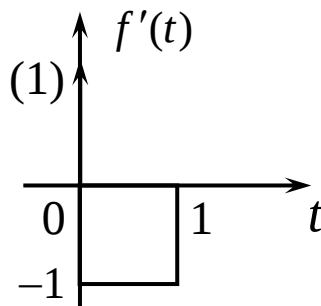
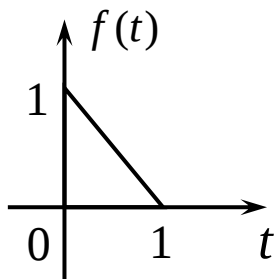
离散序列不做尺度变换，因为可能丢失信息。



■ 信号的基本运算

连续信号的微分与积分

- 连续信号的微分： $f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ 作用：体现信号的变化
- 连续信号的积分： $f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$ 作用：平滑信号的变化



$$f(t) = (1-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \{ (1-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \} \\ &= (1-t)[\delta(t) - \delta(t-1)] - [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \\ &= \delta(t) - [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^t (1-x)[\varepsilon(x) - \varepsilon(x-1)] dx \\ &= \int_0^t (1-x) dx - \int_1^t (1-x) dx \\ &= \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) \varepsilon(t) - \left(t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) \varepsilon(t-1) \\ &= \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + \frac{1}{2} \varepsilon(t-1) \end{aligned}$$

■ 信号的基本运算

离散序列的差分与求和

➤ 离散序列的差分

一阶前向差分 $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

$\Delta \nabla$: 差分算子

一阶后向差分 $\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

$$\nabla f(k) = \Delta f(k-1)$$

➤ 离散序列的求和 $\sum_{i=-\infty}^k f(i)$

序列求和的结果还是一个关于 k 的序列

$$\begin{cases} \delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) = \nabla \varepsilon(k) \\ \varepsilon(k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta(k-j) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i) \end{cases}$$

■ 信号的基本运算

信号运算的综合应用

平移、反折、压缩等各种运算均对独立、单一的时间变量 t/k 计算，而不是对 at 或 $at + b$ 等整体计算。另外：在尺度变换时我们需要注意对冲激信号的尺度变换。

$$f(t) \rightarrow f(at+b)$$

$$f(t) \rightarrow f(t+b) \rightarrow f(at+b)$$

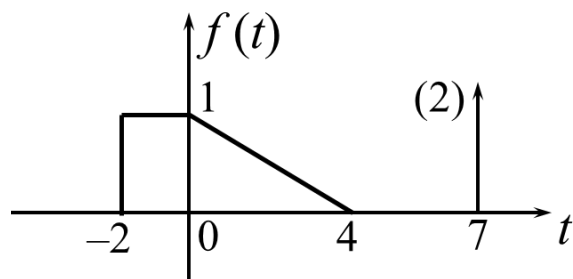
先平移，后尺度（含反折）

$$f(at+b) \rightarrow f(t)$$

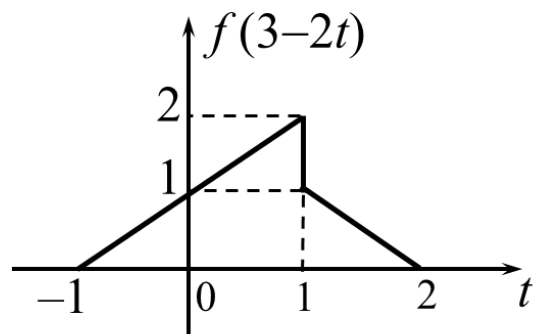
$$f(at+b) \rightarrow f(t+b) \rightarrow f(t)$$

先尺度（含反折），后平移

例题6 已知 $f(t)$ 的波形如下图，试画出 $f(-2t+1)$ 的波形。



例题7 已知 $f(3-2t)$ 的波形如下图，试画出 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 的波形。



1.4 系统的描述与分类

系统的描述

系统的分类

■ 系统的描述

系统的数学模型

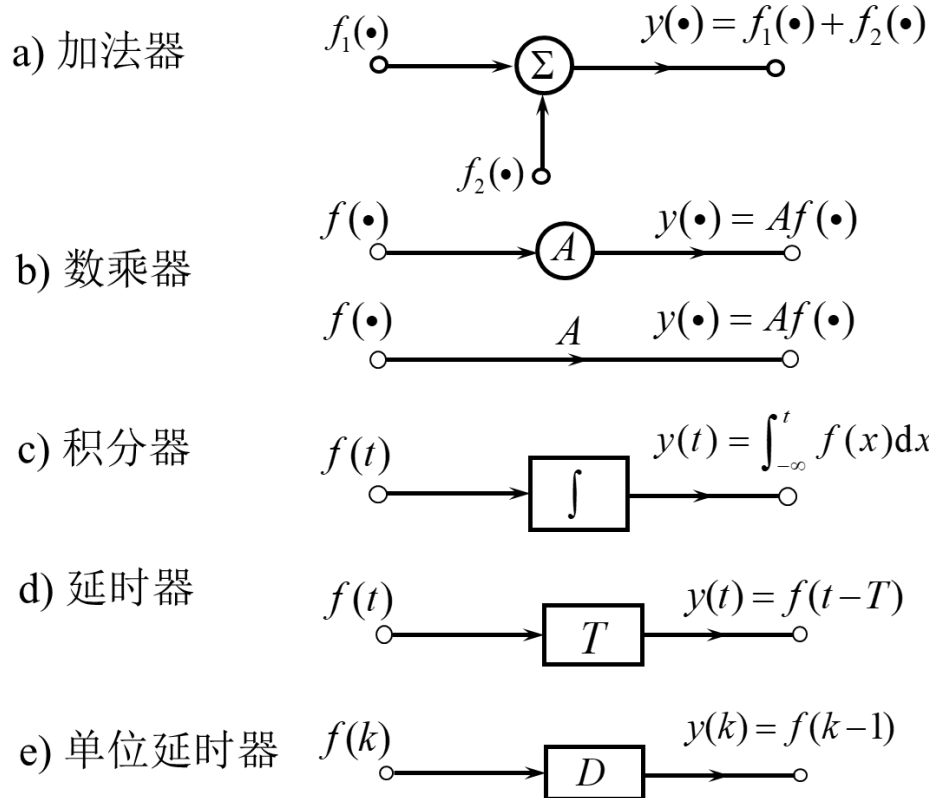
输入-输出描述法：着眼于系统**输入与输出**的关系，适用于单输入-单输出系统。连续系统常用**微分方程**进行表征，离散系统常用**差分方程**进行表征。

状态变量描述法：既可描述输入输出的关系，又可以**描述系统内部的状态**，更适合调整系统内部参数，实现最优控制。既可用于单输入-单输出系统，也可用于多输入-多输出系统。用**状态方程和输出方程**进行表征（第八章）。

■ 系统的描述

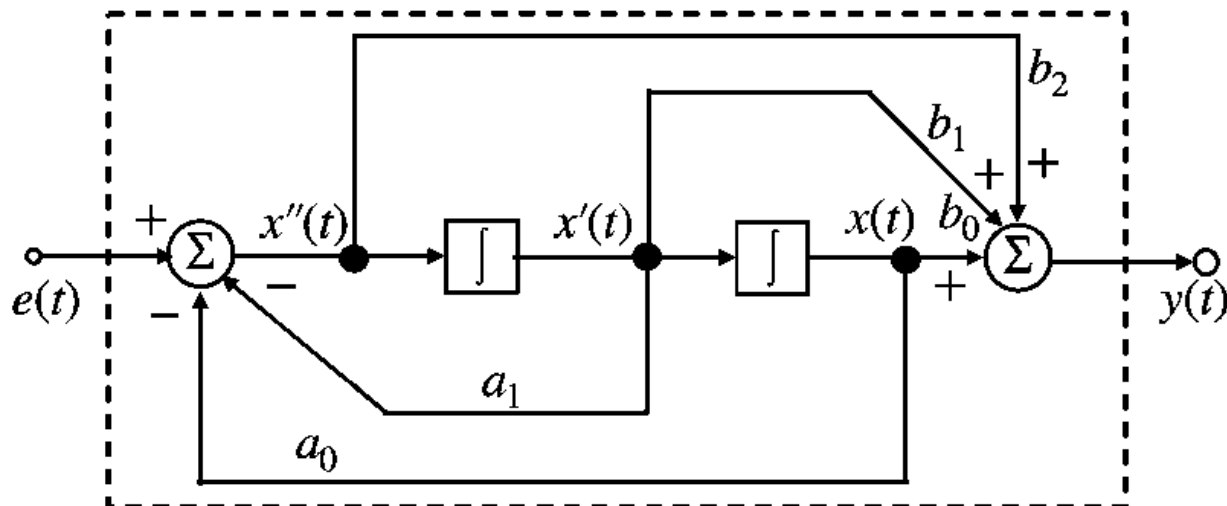
系统的框图描述

用框图表示输入输出的运算关系，每个框图反映一种数学运算功能，若干个框图可以组成一个完成的系统。



■ 系统的描述

连续系统框图与微分方程



左加法器方程:

$$\underline{x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = e(t)}$$

x 换成 y

$$\underline{y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)}$$

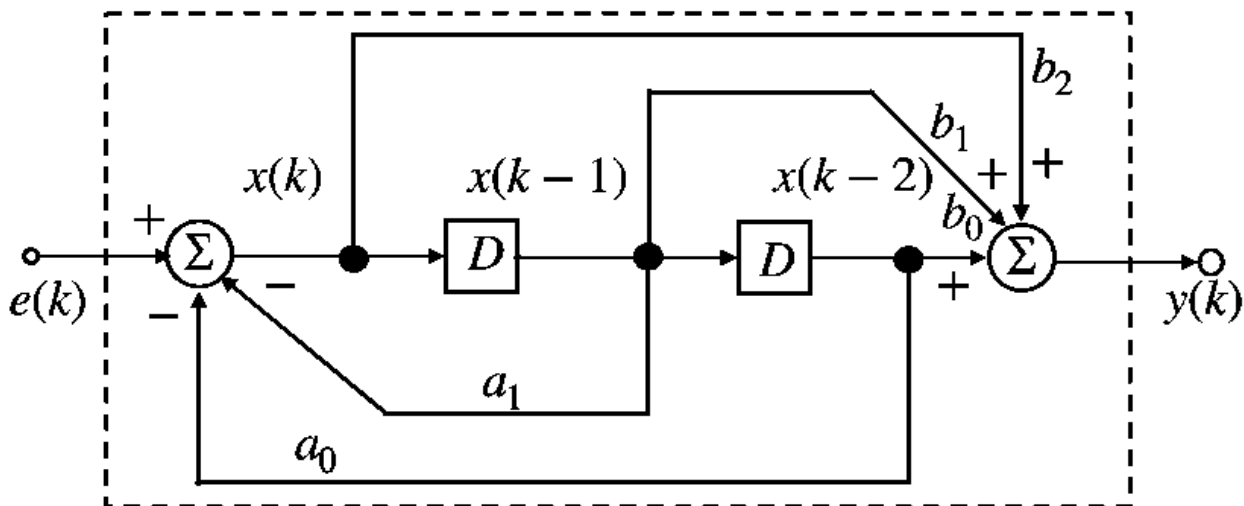
右加法器方程:

$$\underline{y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t)}$$

x 换成 e

■ 系统的描述

离散系统框图与差分方程



左加法器方程：

$$\underline{x(k) + a_1 x(k-1) + a_0 x(k-2) = e(k)}$$

x 换成 y

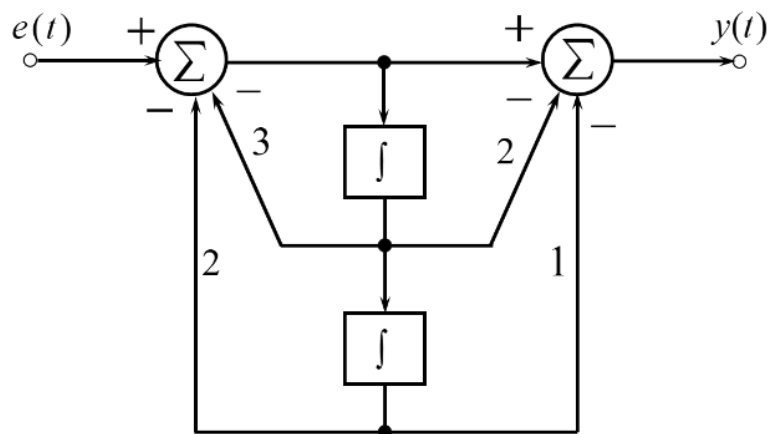
$$\underline{y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)}$$

右加法器方程：

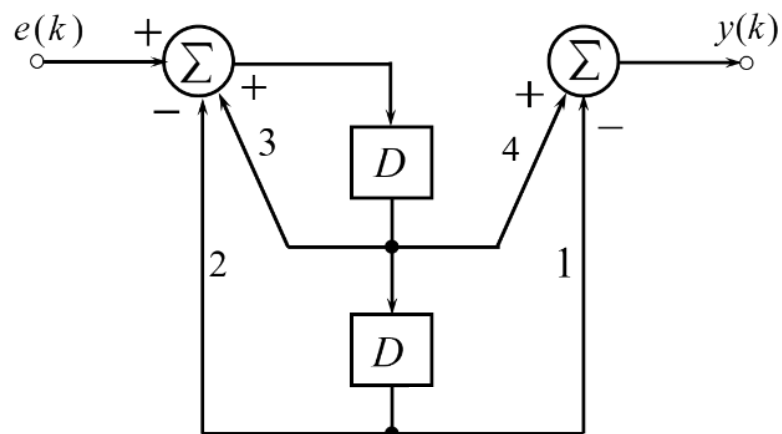
$$\underline{y(k) = b_2 x(k) + b_1 x(k-1) + b_0 x(k-2)}$$

x 换成 e

例题8 根据图示系统框图建立对应的微分方程或者差分方程。



(1)



(2)

■ 系统的分类

连续（时间）系统与离散（时间）系统

- **连续系统：**系统输入和输出均为连续时间信号，用微分方程表征；
- **离散系统：**系统输入和输出均为离散时间信号，用差分方程表征。

即时（无记忆）系统与动态（记忆）系统

- **即时系统：**系统输出仅取决于同一时刻的输入，而与历史状态无关，用代数方程表征；（如电阻电路）
- **动态系统：**输出同时取决于同一时刻的输入与系统的历史状态，用微分/差分方程表征。（如RLC动态电路）

■ 系统的分类

线性系统与非线性系统

- 线性系统：满足均匀性和叠加性的系统。
- 均匀性：系统的激励信号增大 K 倍时，系统响应也增大 K 倍；
- 叠加性：几个激励信号同时作用于系统时，系统响应等于各激励信号单独作用于系统的响应之和。
- 非线性系统：与线性系统相对，不具备均匀性或叠加性。

时变系统与时不变系统

- 时变系统：系统参数随时间变化；
- 时不变系统：系统参数不随时间变化的系统。

■ 系统的分类

因果系统与非因果系统

- 因果系统：当且仅当输入激励时，系统才会出现响应，即响应不会先于激励；
- 非因果系统：响应先于激励产生的系统。

稳定系统与不稳定系统

- 稳定系统：输入有界，输出也有界的系统；
- 不稳定系统：与稳定系统相对。

在这门课程中主要学习线性时不变系统

1.5 线性时不变系统的性质

线性性质与分解特性

时不变性质

微分与积分性质

因果性与稳定性

■ 线性性质与分解特性



线性性质

输入-输出关系: $y(\bullet) = T[e(\bullet)]$

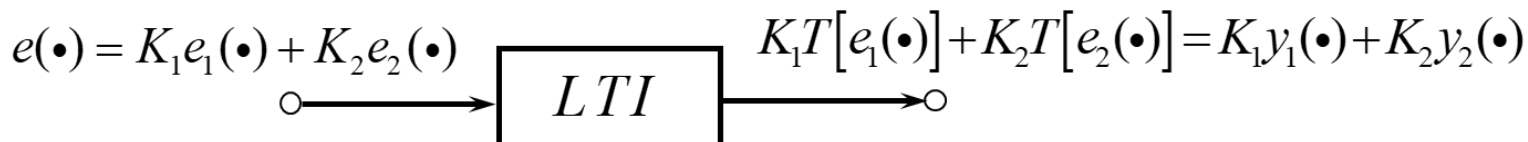
- 均匀性: 系统的激励增大 K 倍时, 响应相应也增大 K 倍

$$y(\bullet) = T[e(\bullet)] \implies T[Ke(\bullet)] = KT[e(\bullet)] = Ky(\bullet)$$

- 叠加性: 几个激励信号同时作用于系统时, 系统响应等于各激励信号单独作用于系统的响应之和

$$\begin{cases} y_1(\bullet) = T[e_1(\bullet)] \\ y_2(\bullet) = T[e_2(\bullet)] \end{cases} \implies T[e_1(\bullet) + e_2(\bullet)] = T[e_1(\bullet)] + T[e_2(\bullet)] = y_1(\bullet) + y_2(\bullet)$$

$$T[K_1e_1(\bullet) + K_2e_2(\bullet)] = K_1T[e_1(\bullet)] + K_2T[e_2(\bullet)] = K_1y_1(\bullet) + K_2y_2(\bullet)$$



例题9 判断下列系统是否是线性系统。

1) $y(t) = 2e(t)$

2) $y(t) = 2e(t) + 3$

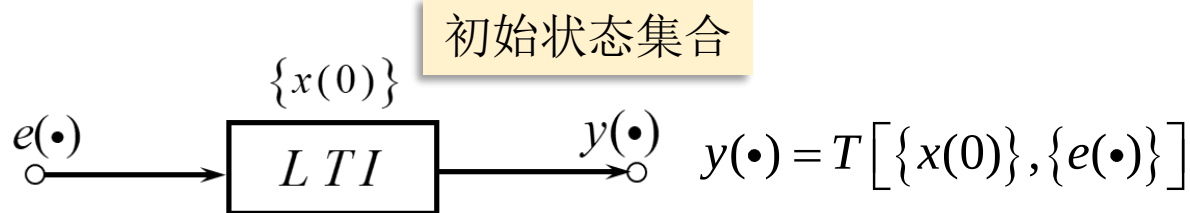
3) $y(t) = t^2 e(t)$

4) $y(t) = 4 \frac{d}{dt} e(t)$

5) $y(k) = \text{Im}[e(k)]$ $\text{Im}[\bullet]$ 表示取虚部

■ 线性性质与分解特性

分解特性 动态系统的响应由激励和初始状态共同决定



$$y(\bullet) = T[\{x(0)\}, \{e(\bullet)\}] = \underbrace{T[\{x(0)\}, \{0\}]}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{T[\{0\}, \{e(\bullet)\}]}_{\text{零状态响应}} = y_{zi}(\bullet) + y_{zs}(\bullet)$$

➤ 零输入响应: $y_{zi}(\bullet) = T[\{x(0)\}, \{0\}]$

激励为0, 仅由初始状态引起的系统响应。

➤ 零状态响应: $y_{zs}(\bullet) = T[\{0\}, \{e(\bullet)\}]$

初始状态为0, 仅由激励引起的系统响应。

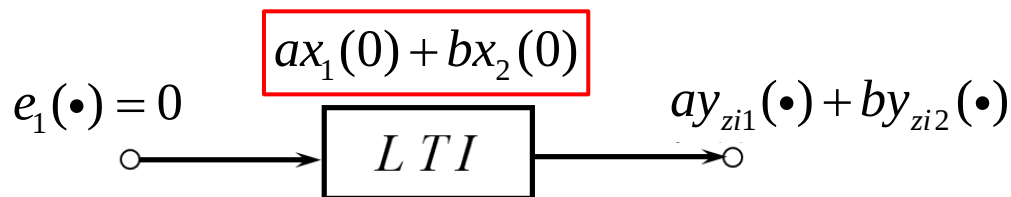
■ 线性性质与分解特性

分解特性

- 零输入线性 零输入响应对系统的初始状态有线性关系。

$$y_{zi1}(\bullet) = T[x_1(0)], y_{zi2}(\bullet) = T[x_2(0)]$$

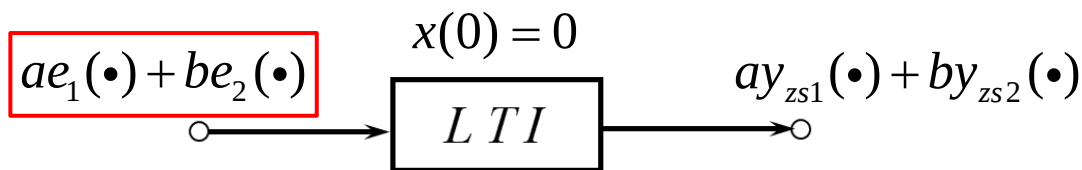
$$T[ax_1(0) + bx_2(0)] = aT[x_1(0)] + bT[x_2(0)] = ay_{zi1}(\bullet) + by_{zi2}(\bullet)$$



- 零状态线性 零状态响应对系统的激励有线性关系。

$$y_{zs1}(\bullet) = T[e_1(\bullet)], y_{zs2}(\bullet) = T[e_2(\bullet)]$$

$$T[ae_1(\bullet) + be_2(\bullet)] = aT[e_1(\bullet)] + bT[e_2(\bullet)] = ay_{zs1}(\bullet) + by_{zs2}(\bullet)$$



例题10 判断下列系统是否是线性系统。

1) $y(t) = e(t)x(0) + \int_0^t \sin x e(x) dx$

2) $y(t) = 2x(0) + |e(t)|$

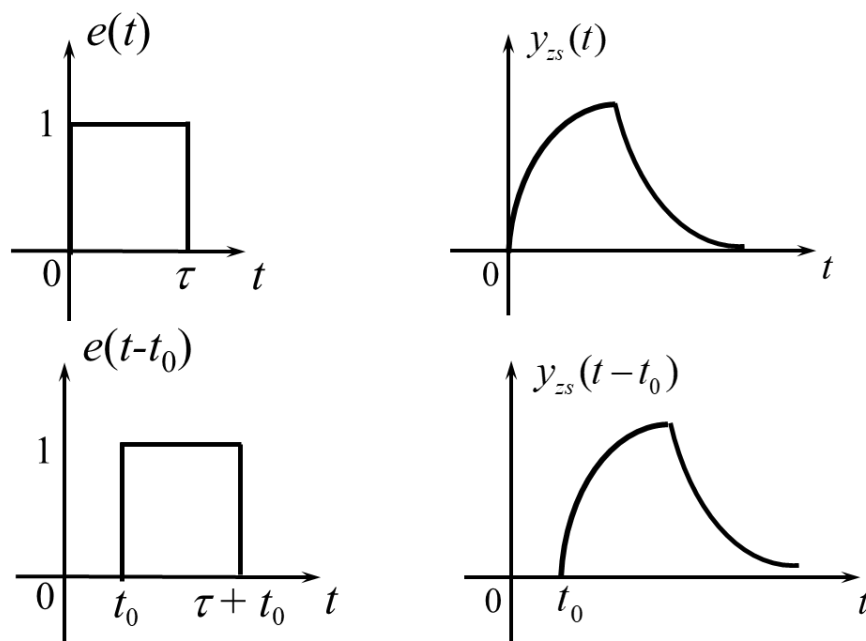
3) $y(k) = x^2(0) + 4e(k)$

4) $y(t) = x(0)e^{-t} + \int_0^t e(x) \cos x dx$

■ 时不变性质

$$y_{zs}(\bullet) = T[\{0\}, \{e(\bullet)\}] \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} T[\{0\}, \{e(t-t_d)\}] = y_{zs}(t-t_d) \\ T[\{0\}, \{e(k-k_d)\}] = y_{zs}(k-k_d) \end{cases}$$

时不变系统的响应形式与激励接入系统的时间无关，激励延时，输出也产生相应延时而波形不变。



例题11 判断下列系统是否是时不变系统。

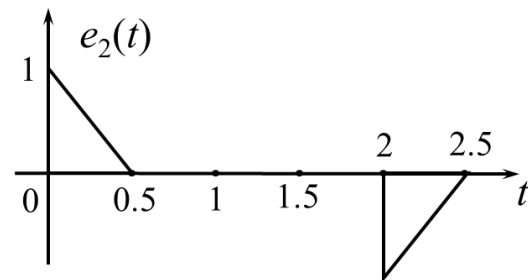
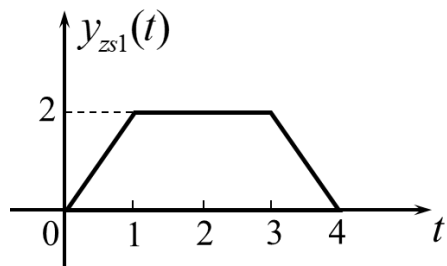
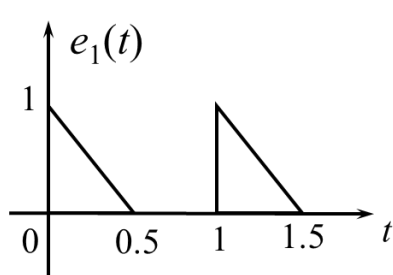
1) $y(t) = \sin[e(t)] + 2e(t)$ 2) $y(k) = ke(k)$

3) $y(t) = e(2t)$ 4) $y(t) = e(-t)$

时不变直观判断方法：若信号之前出现变系数，或者信号有反转和尺度变换，则系统为时变系统。

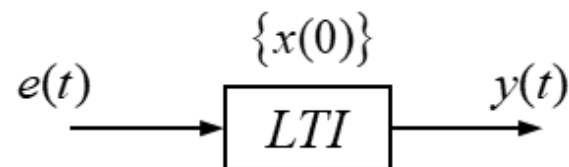
例题12

某一LTI连续系统，输入信号和响应信号如下图所示，当输入为 $e_1(t)$ 时，其零状态响应为 $y_{zs1}(t)$ ；当输入为 $e_2(t)$ 时，试求该系统的零状态响应 $y_{zs2}(t)$ 。



例题13 给定LTI连续系统如下图，已知：

$$\begin{cases} y_1(t) = T[\{x(0)\}, \{e(t)\}] = [2e^{-t} + \cos \pi t] \varepsilon(t) \\ y_2(t) = T[\{x(0)\}, \{2e(t)\}] = [3e^{-t} + 2 \cos \pi t] \varepsilon(t) \end{cases}$$



求： $y_3(t) = T[\{2x(0)\}, \{5e(t)\}]$ 和 $y_4(t) = T[\{2x(0)\}, \{5e(t-2)\}]$

■ 微分与积分性质

$$y_{zs}(t) = T[\{0\}, \{e(t)\}] \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} T\left[\{0\}, \frac{de(t)}{dt}\right] = \frac{dy_{zs}(t)}{dt} \\ T\left[\{0\}, \int_{-\infty}^t e(x)dx\right] = \int_{-\infty}^t y_{zs}(x)dx \end{cases}$$

- 激励求导或积分，响应为原响应求导或积分
- 该性质对于高阶导数或重积分同样适用

例题14

某一LTI系统，激励为 $e(t) = \varepsilon(t)$ 时，零状态响应为 $y_{zs}(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$ ，试求当激励为 $e(t) = 2\delta(t-1)$ 时，系统的零状态响应。

■ 因果性与稳定性

因果性

系统为因果系统，则零状态响应只能在激励产生的瞬间或者之后再出现。即 $t = t_0 (k = k_0)$ 时系统响应只与 $t \leq t_0 (k \leq k_0)$ 时的激励有关。

➤ 因果信号： $e(\bullet) = 0, t < 0$ 或 $k < 0$

因果系统中，激励为因果信号，响应也一定是因果信号。

例题15 判断下列系统是否是因果系统。

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| 1) $y(t) = 3e(t-1)$ | 2) $y(k) = e(k+1)$ |
| 3) $y(t) = e(2t)$ | 4) $y(t) = e(t)\sin(t+1)$ |

■ 因果性与稳定性

稳定性

稳定系统满足：当 $|e(\bullet)| < \infty$ 时，存在 $|y_{zs}(\bullet)| < \infty$

若系统对**有界输入**的**零状态响应也有界**，则系统为稳定系统。

例题16 判断下列系统是否是稳定系统。

1) $y_{zs}(k) = e(k) + e(k+1)$

2) $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^t e(x) dx$

3) $y_{zs}(k) = (k-2)e(k)$

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

信号与系统

第2章 连续时间信号与系统的时域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第2章 连续时间信号与系统的时域分析

2.1 系统微分方程的经典解

2.2 零输入响应与零状态响应

2.3 单位冲激响应与单位阶跃响应

2.4 卷积积分

2.1 系统微分方程的经典解

微分方程的基本概念

微分方程的经典解

初始状态和初始条件的讨论

■ 微分方程的基本概念

对于单输入单输出的LTI连续系统来说，描述其输入-输出关系的数学模型是 n 阶常系数线性微分方程，其一般形式为：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1} e^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}(t)$$

➤ **初始条件：** n 阶系统在 $t = 0$ 时接入激励，响应在 $t = 0_+$ 时刻的值。

$$y^{(j)}(0_+) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{激励接入后的瞬间}$$

➤ **初始状态：** n 阶系统在激励尚未接入的 $t = 0_-$ 时刻的响应值，该值反映了系统的历史情况，而与激励无关。

$$y^{(j)}(0_-) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{激励接入前的瞬间}$$

■ 微分方程的经典解

齐次解 $y_h(t)$

- 微分方程右侧为零时称为齐次方程，即 $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = 0$ 。
- 齐次解指齐次方程的解，只由系统的特征根决定。

n 阶微分方程的齐次解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{特征方程} \\ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \\ \text{特征根} \quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \end{array}$$

■ 特征根均为单根： $y_h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$

■ 特征根含 r 重根 λ_1 ： r 重根对应 $(C_1 t^{r-1} + C_2 t^{r-2} + \cdots + C_{r-1} t + C_r) e^{\lambda_1 t}$

■ 特征根含共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ： 共轭复根对应的解为

$$e^{\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t] \quad \text{或} \quad Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \theta), \quad Ae^{j\theta} = C_1 + jC_2$$

■ 微分方程的经典解

特解 $y_p(t)$ 特解的形式与激励的函数形式有关。

下表给出几种典型激励信号对应的特解形式。

激励信号 $e(t)$	特解 $y_p(t)$
E (常数)	P (常数)
t	$P_1 t + P_0$ 所有特征根不为 0 $t(P_1 t + P_0)$ 有一个为 0 的特征根
$e^{\alpha t}$	$P e^{\alpha t}$ α 不等于特征根 $(P_1 t + P_0) e^{\alpha t}$ α 等于特征单根
$\cos(\beta t), \sin(\beta t)$	$P_1 \cos(\beta t) + P_2 \sin(\beta t)$ 或 $A \cos(\beta t - \theta)$, $A e^{j\theta} = P_1 + jP_2$

根据激励的形式选定含待定系数的特解，将特解和激励代入原微分方程中，比较方程两端的系数可确定待定系数大小。

激励在 $t = 0$ 时刻加入系统，故特解存在区间为 $t > 0$ 。

■ 微分方程的经典解

全解 $y(t)$

- 将特解与齐次解相加就得到全解。
- 此时齐次解中尚含待定系数 C_i ， n 阶微分方程需利用 n 个初始条件 $y(0_+)$, $y'(0_+)$, $\dots$, $y^{(n-1)}(0_+)$ 确定之。

经典解法流程图

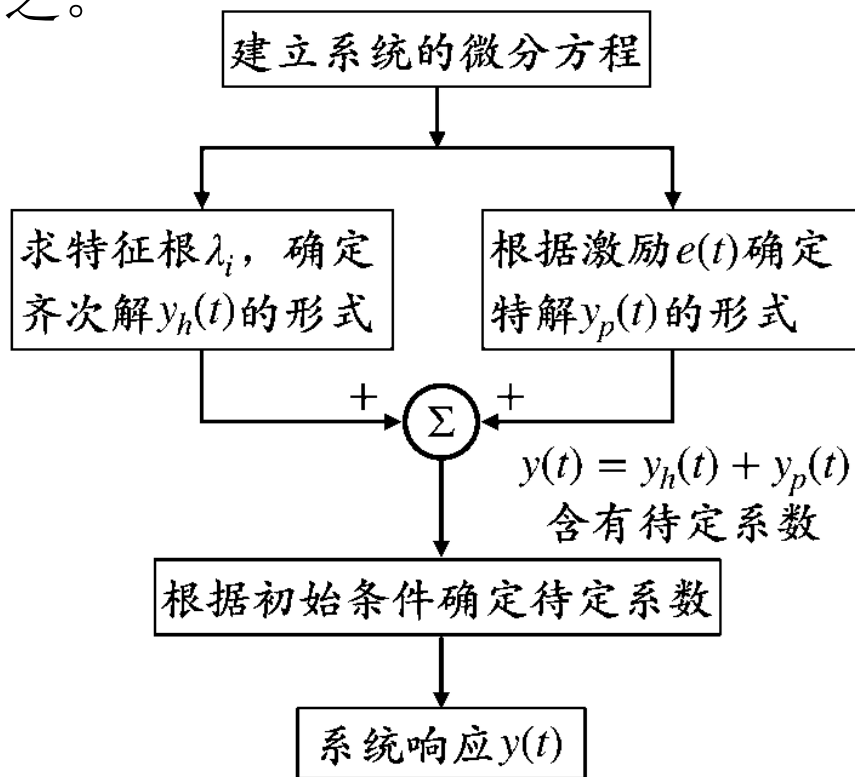
$$y(t) = \underline{y_h(t)} + \underline{y_p(t)}$$

齐次解

特解

自由响应

强迫响应



例题1 某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e(t)$

- 1) 当 $e(t) = 2e^{-t}$, $t \geq 0$, $y(0_+) = 2, y'(0_+) = -1$ 时, 求解系统全解;
- 2) 当 $e(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$, $y(0_+) = 1, y'(0_+) = 0$ 时, 求解系统全解。

■ 微分方程的经典解

自由响应和强迫响应

- **自由响应**：仅与系统本身特性有关，而与激励的形式无关，齐次解仅与系统特征根有关，特征根称为系统的“固有频率”，**齐次解**常称为系统的**固有响应**或**自由响应**。
- **强迫响应**：与激励的函数形式有关，**特解**的形式与激励的形式有关，常称为**强迫响应**。

暂态响应和稳态响应

- **暂态响应**：指响应中暂时出现的分量，随着时间增长，它将消失。
- **稳态响应**：指稳定的分量，常以阶跃函数和周期函数等形式存在。
如：电路系统中的直流稳态响应和正弦稳态响应。

例题2 某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e(t)$

1) 当 $e_1(t) = 10 \cos t$ 时, 全响应 $y_1(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

2) 当 $e_2(t) = 2e^{-t}$ 时, 全响应 $y_2(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}$

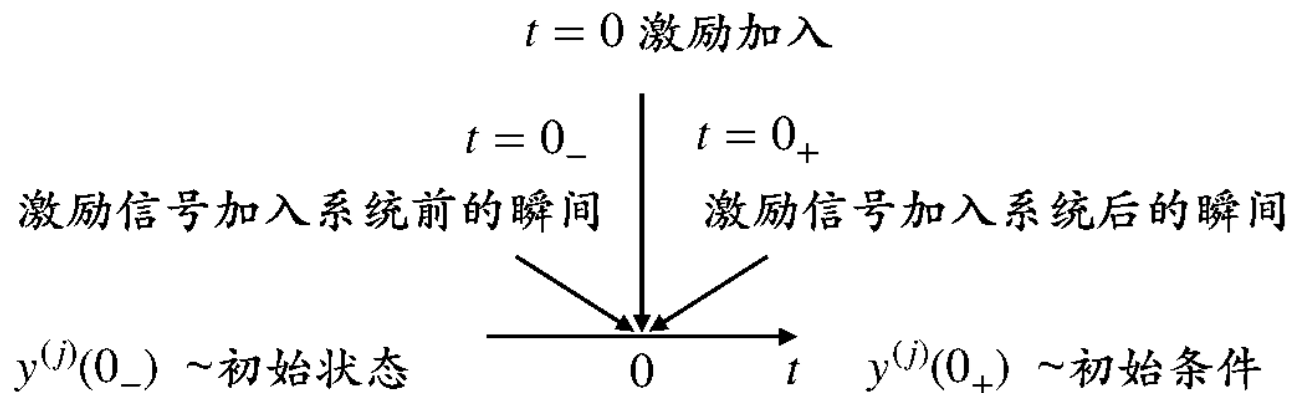
3) 当 $e_3(t) = \varepsilon(t)$ 时, 全响应 $y_3(t) = -e^{-2t} + 3$

判断以上全响应中的自由响应、强迫响应、暂态响应和稳态响应分量。

■ 初始状态和初始条件的讨论

初始状态: $y^{(j)}(0_-)$

初始条件: $y^{(j)}(0_+)$



- 实际中，往往先得知系统的初始状态，即先得知激励接入前系统的历史信息。
- 由于激励的接入，从 0_- 时刻过渡到 0_+ 时刻之后，初始状态和初始条件往往不一样，我们用跳变量表示这个变化。
- 求解微分方程需要从已知的初始状态 $y^{(j)}(0_-)$ 求得初始条件 $y^{(j)}(0_+)$ 。

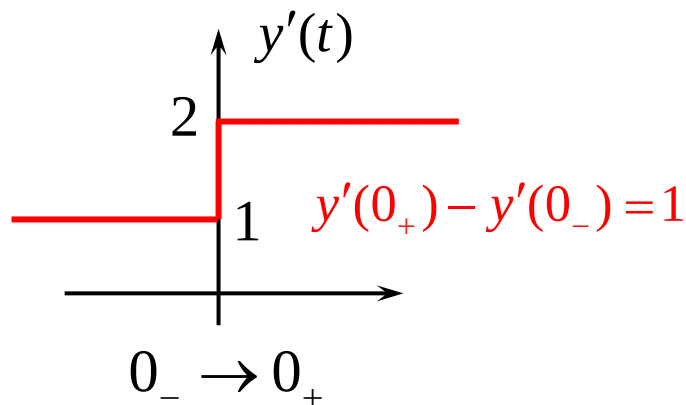
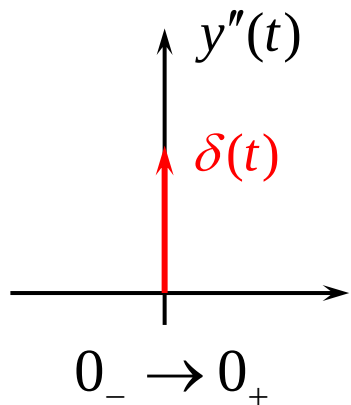
■ 初始状态和初始条件的讨论

➤ 基本思路

如果激励加入后，在方程右端出现 $\delta(t)$ 及其各阶导数，则在方程左端也应有与之对应的 $\delta(t)$ 及其各阶导数项，使方程两端平衡。

冲激函数的产生，意味着方程左端 $y^{(i)}(t)$ 中的某些项在 $t=0$ 处有阶跃的跳变。

举例：



介绍两种求解初始条件的主要方法：**待定系数法**和**冲激平衡法**，后续做题主要使用后者。

例题3

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e''(t) + 2e'(t) + e(t)$
已知系统激励 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，系统的初始状态为 $y(0_-) = 0$, $y'(0_-) = 1$ ，试求系统的初始条件 $y(0_+)$, $y'(0_+)$ 。

法1:
$$\underline{y''(t)} + 4y'(t) + 3y(t) = \underline{\delta'(t)} + 2\delta(t) + \varepsilon(t)$$

积分，且只考虑冲激和阶跃项

$$y''(t) = \delta'(t) + a\delta(t) + b\varepsilon(t)$$

$$y'(t) = \delta(t) + a\varepsilon(t)$$

$$y(t) = \varepsilon(t)$$

代入微分方程，只看冲激项

$$\delta'(t) + (4+a)\delta(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

$$4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$\begin{cases} y'(t) = \delta(t) - \underline{2\varepsilon(t)} \\ y(t) = \underline{\varepsilon(t)} \end{cases}$$

跳变量



$$\begin{cases} y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 0 + 1 = 1 \\ y'(0_+) = y'(0_-) + y'_e(0_+) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

例题3

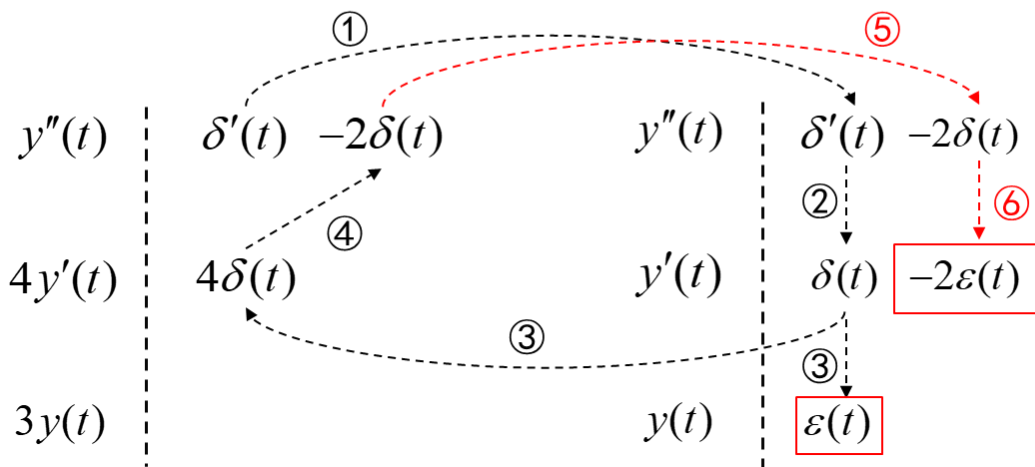
某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e''(t) + 2e'(t) + e(t)$
 已知系统激励 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，系统的初始状态为 $y(0_-) = 0$, $y'(0_-) = 1$ ，试求
 系统的初始条件 $y(0_+)$, $y'(0_+)$ 。

法2:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + \varepsilon(t)$$

方程左侧各项

方程左侧各项的单位项



从高往低配，从左往右配
 只看冲激项，高阶补低阶
 左侧看配平，右侧出跳变

$$\begin{cases} y(0_+) = y(0_-) + y_e(0_+) = 0 + 1 = 1 \\ y'(0_+) = y'(0_-) + y'_e(0_+) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

2.2 零输入响应与零状态响应

零输入响应

零状态响应

系统全响应

求解思路总结

■ 零输入响应 zero input

零输入响应 $y_{zi}(t)$

- 零输入响应指的是在激励为零时，仅由初始状态引起的响应。
- 由于激励为零，因此 $y_{zi}(t)$ 对应齐次方程 $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = 0$ 。
- 零输入响应由特征根决定，形式为齐次解。当特征根均为单实根时，零输入响应的形式为

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^n C_{xi} e^{\lambda_i t}, t \geq 0$$

- 确定待定系数 C_{xi} ：由初始状态 $y^{(j)}(0_-)$ 确定，由于没有激励，此时系统的初始状态就是零输入响应的初始条件，即 $y_{zi}^{(j)}(0_+) = y^{(j)}(0_-)$ 。

■ 零状态响应 zero state

零状态响应 $y_{zs}(t)$

- 零状态响应指的是在初始状态为零时，仅由激励引起的响应。
- 此时 $y_{zs}(t)$ 对应非齐次方程 $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}(t)$ 。
- 零状态响应包含相应的齐次解和特解两部分。当特征根均为单实根时，零状态响应的形式为

$$y_{zs}(t) = \sum_{i=1}^n C_{si} e^{\lambda_i t} + y_p(t) \quad t > 0$$

- 确定待定系数 C_{si} ：由零状态初始条件 $y_{zs}^{(j)}(0_+)$ 确定。

$y_{zs}^{(j)}(0_+) = \text{跳变量}$ ，通过冲激平衡法确定

■ 全响应

$$\text{全响应 } y(t) \quad y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

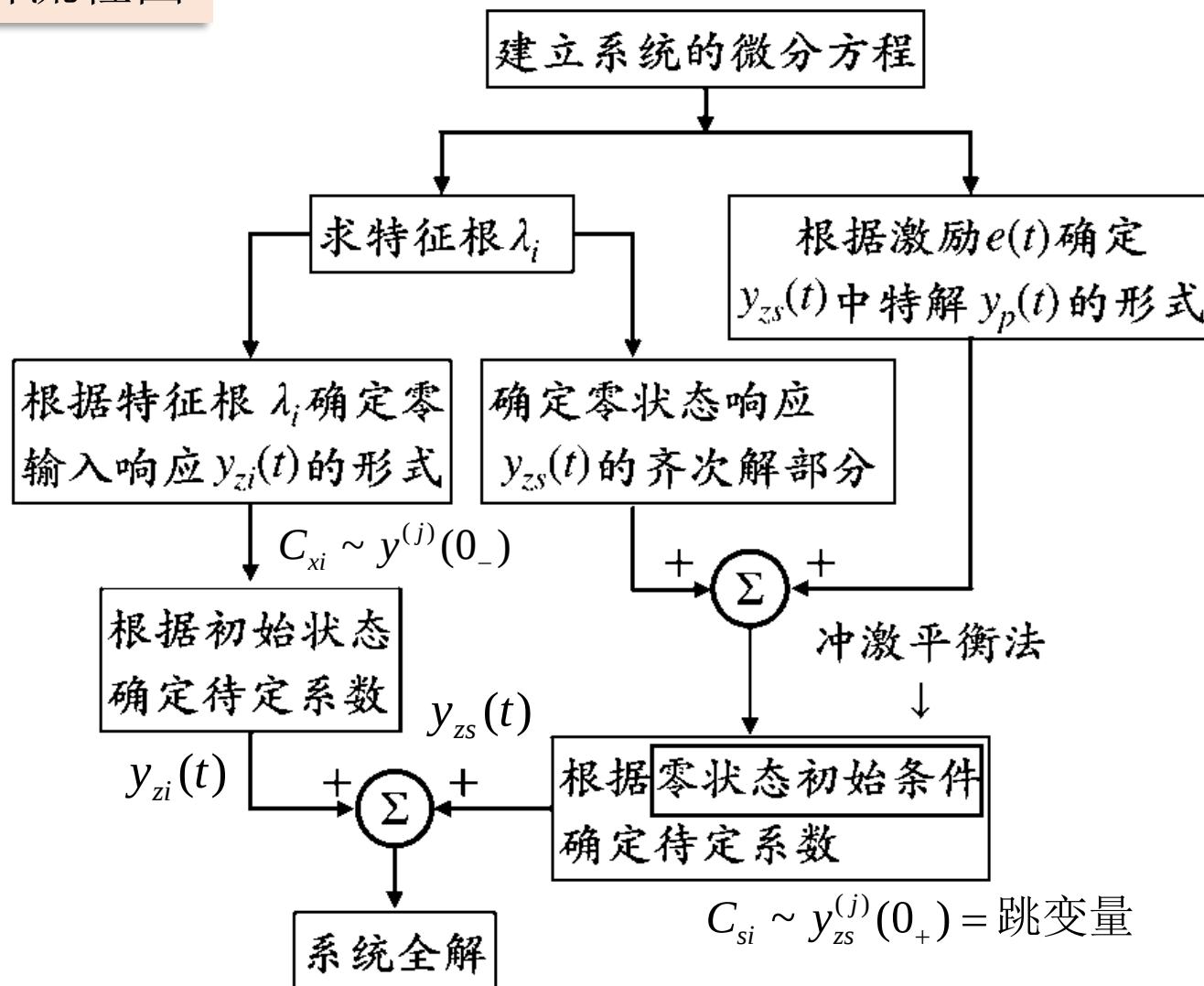
$$\underbrace{\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + y_p(t)}_{\substack{\text{初始条件} \\ = \text{初始状态} \\ + \text{跳变量}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{xi} e^{\lambda_i t}}_{\substack{\text{初始条件} \\ = \text{初始状态}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{si} e^{\lambda_i t} + y_p(t)}_{\substack{\text{初始条件} \\ = \text{跳变量}}}, t > 0$$

➤ 辨析：待定系数 C_{xi} , C_{si} 与齐次解待定系数 C_i 的区别。

零输入响应包含一部分齐次解，零状态响应包含另一部分齐次解以及特解，待定系数满足 $C_i = C_{xi} + C_{si}$ 。

■ 求解思路总结

时域分析流程图



例题4

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e''(t) + 6e(t)$ ，初始状态 $y(0_-) = 1, y'(0_-) = 3$ ，激励 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ ，零状态响应 $y_{zs}(t)$ 与全响应 $y(t)$ 。

例题5

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e'(t) + 3e(t)$ ，初始状态 $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 1$ ，激励 $e(t) = t\varepsilon(t)$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ ，零状态响应 $y_{zs}(t)$ 与全响应 $y(t)$ 。

2.3 单位冲激响应与单位阶跃响应

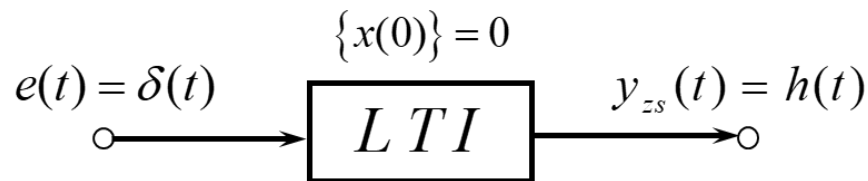
单位冲激响应 $h(t)$

单位阶跃响应 $g(t)$

$h(t)$ 与 $g(t)$ 的关系

■ 单位冲激响应 $h(t)$

单位冲激响应的定义



激励为冲激信号 $\delta(t)$ 时，LTI系统的零状态响应称为单位冲激响应，记为 $h(t)$ 。

$$h(t) \triangleq T[\{x(0) = 0\}, \{e(t) = \delta(t)\}]$$

单位冲激响应的形式

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}(t) \longrightarrow \sum_{i=0}^n a_i h^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j \delta^{(j)}(t)$$

$n > m$ $h(t) = \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) \varepsilon(t)$ 单位冲激响应与齐次解形式完全一致

$n = m$ $h(t) = \underline{C_0 \delta(t)} + \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) \varepsilon(t)$ 依据冲激平衡，多出冲激项

$n < m$ $h(t) = \underline{C_0 \delta(t) + C_{0(1)} \delta'(t) + \cdots + C_{0(m-n)} \delta^{(m-n)}(t)} + \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) \varepsilon(t)$

冲激平衡法

初始状态 $h^{(j)}(0_-) = 0$ $\longrightarrow$ 初始条件 $h^{(j)}(0_+) = \text{跳变量}$

例题6

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e'(t) + 2e(t)$ ，试求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

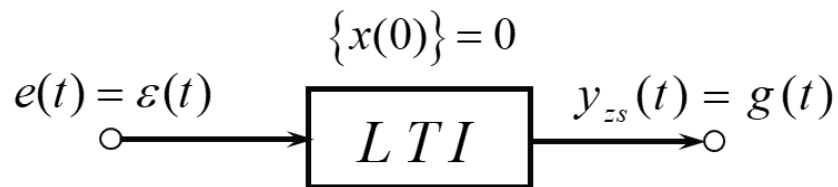
例题7

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = e'''(t) + 2e'(t)$ ，试求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

■ 单位阶跃响应 $g(t)$

单位阶跃响应的定义

激励为阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 时，LTI系统的零状态响应称为单位阶跃响应，记为 $g(t)$ 。



$$g(t) \triangleq T[\{x(0) = 0\}, \{e(t) = \varepsilon(t)\}]$$

需注意的是，此处对应非齐次方程，单位阶跃响应可能包含有特解，因此按照分析零状态响应的一般思路去求就可以。

例题8

某LTI连续系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3e'(t) + 2e(t)$ ，试求系统的单位阶跃响应 $g(t)$ 。

■ $h(t)$ 与 $g(t)$ 的关系

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$$

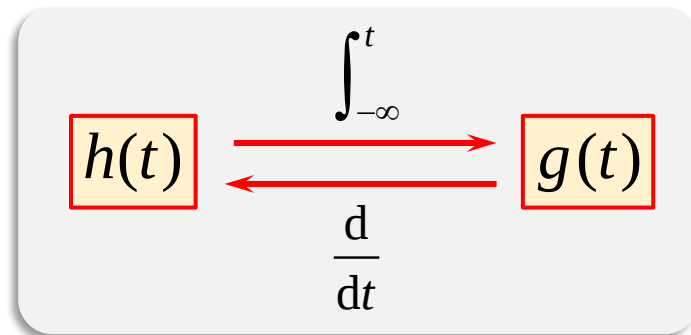
系统

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx$$

系统

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx$$



说明

单位冲激响应完全由系统微分方程决定，可表征系统特性，可以用 $h(t)$ 和 $g(t)$ 表征系统，并判断系统的因果性、稳定性等特性。

例题9

- 1) 已知某LTI连续系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$ ，试求该系统的单位阶跃响应 $g(t)$ ；
- 2) 已知某LTI连续系统的单位阶跃响应为 $g(t) = e^{-3t} \varepsilon(t)$ ，试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

2.4 卷积积分

卷积积分的定义

卷积积分的求解

卷积积分的性质

■ 卷积积分的定义

卷积积分的定义式

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

对定义式的说明

- 这个积分式中， τ 是为了防止变量混淆而虚设的积分变量
- 卷积积分的最终结果是一个新的连续函数，自变量仍然为时间 t
- 卷积积分实质上是一个关于移位量 t 的连续时间函数

直观理解：上式对 τ 积分，最后剩下的变量是 t 。

■ 卷积积分的求解

解析法

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

变量置换: $f_1(t), t \rightarrow \tau$ $f_2(t), t \rightarrow t - \tau$

相乘积分: 积分变量为 τ , 结果为关于 t 的函数。

关键: 依据信号的形式确定积分区间, 从而确定卷积结果的信号形式

➤ 若 $f_1(t)$ 是因果信号, 即 $f_1(t) = 0, t < 0$, $f_2(t)$ 不受限制, 则:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad \tau > 0$$

➤ 若 $f_2(t)$ 是因果信号, 即 $f_2(t) = 0, t < 0$, $f_1(t)$ 不受限制, 则:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad t - \tau > 0 \Rightarrow \tau < t$$

➤ 若 $f_1(t), f_2(t)$ 均为因果信号, $f_1(t) = f_2(t) = 0, t < 0$, 则:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad \tau > 0, t - \tau > 0 \Rightarrow 0 < \tau < t$$

例题10 求解下列卷积积分。

1) $e^{-t}\varepsilon(t)*e^{-2t}\varepsilon(t)$

2) $\varepsilon(t)*\varepsilon(t)$

3) $e^{-t}*e^{-2t}\varepsilon(t)$

4) $t\varepsilon(t)*e^{-t}\varepsilon(t)$

5) $\varepsilon(t+2)*\varepsilon(t-3)$

注意：积分区间的确定，求得卷积后信号的范围。

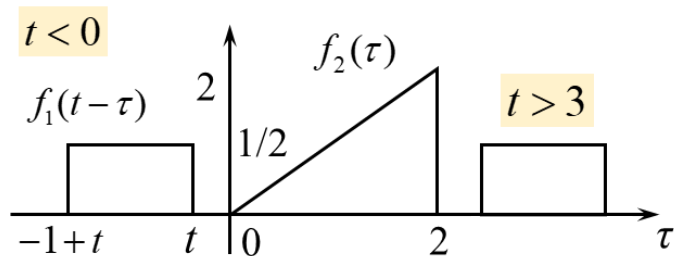
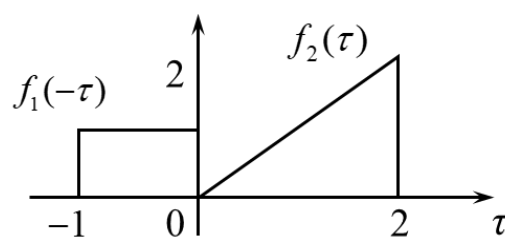
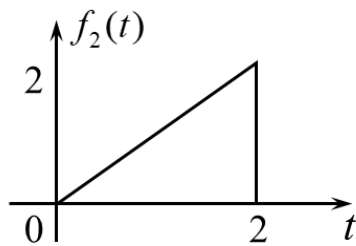
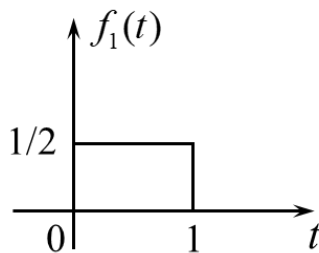
■ 卷积积分的求解

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

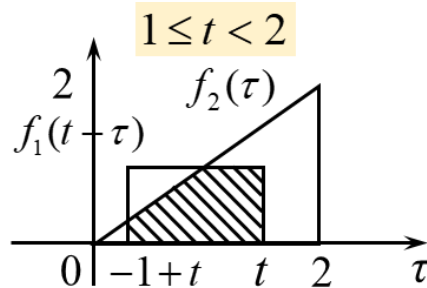
图解法

- **变量置换：** $f_1(t) \rightarrow f_1(\tau)$, $f_2(t) \rightarrow f_2(\tau)$ ，作出 $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ 的波形
- **波形反折：** $f_2(\tau) \rightarrow f_2(-\tau)$ ，即作出 $f_2(\tau)$ 关于纵轴反折后的波形
- **波形移位：** $f_2(-\tau) \rightarrow f_2(t - \tau)$ ，即将 $f_2(-\tau)$ 沿着 τ 轴平移一个 t 值，得到 $f_2(t - \tau)$ ： $t < 0$ 时左移， $t > 0$ 时右移
- **函数相乘：** 将移位后的函数 $f_2(t - \tau)$ 与 $f_1(\tau)$ 相乘，得到卷积积分的被积函数 $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$
- **求解积分：** 若 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t - \tau)$ 波形有重叠，则卷积积分为 $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$ 在重叠区间的积分；若波形无重叠，则卷积积分为0。
- **时间遍历：** 令 t 在 $(-\infty, +\infty)$ 内变化，重复以上步骤，最终解出卷积。

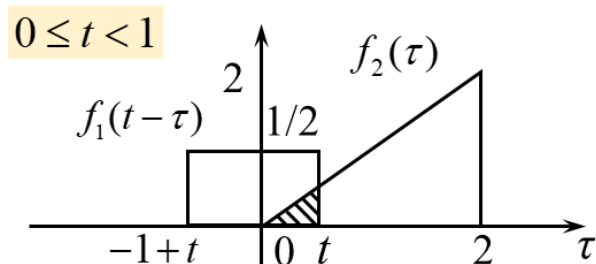
例题11 信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 如图, 利用图解法求 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。



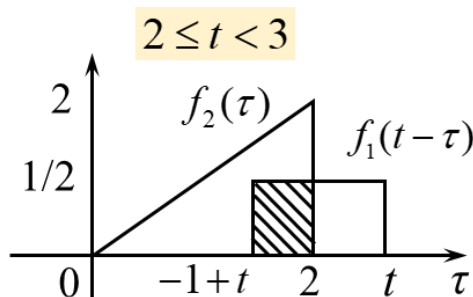
$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$



$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{t-1}^t \frac{1}{2} \tau d\tau = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$$

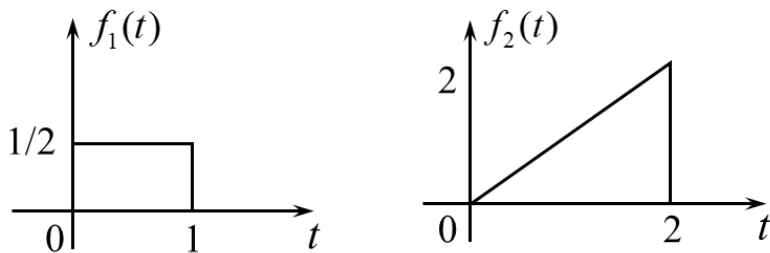


$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \tau d\tau = \frac{1}{4}t^2$$

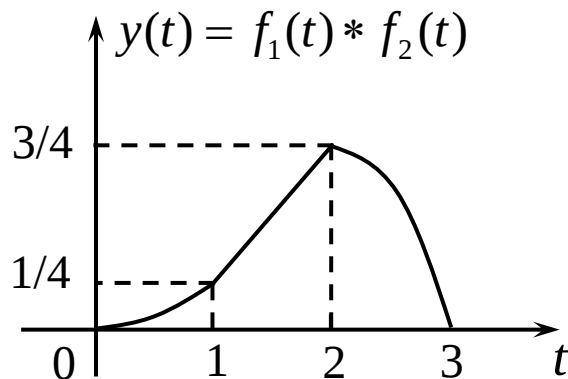


$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{t-1}^2 \frac{1}{2} \tau d\tau = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

例题11 信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 如图, 利用图解法求 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。



$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} & 1 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & t < 0 \text{ 或 } t > 3 \end{cases}$$

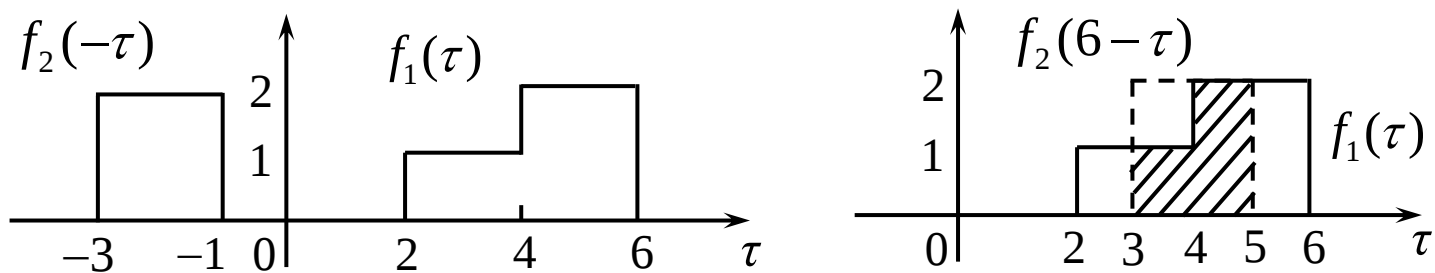
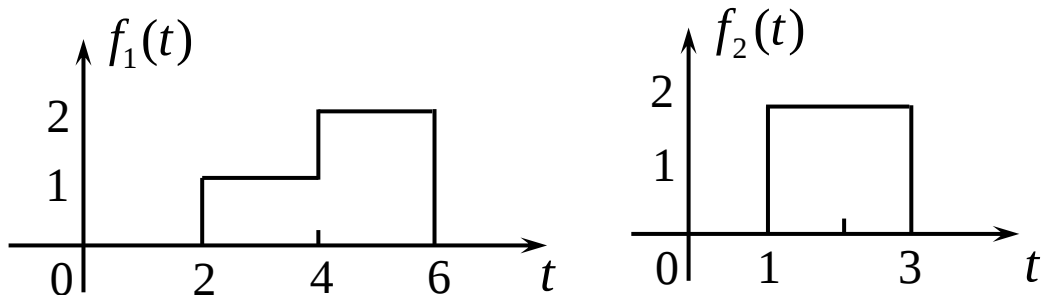


■ 卷积积分的特点

- 卷积积分实质上是关于移位量 t 的函数, t 蕴含在重叠区间内
- $f_1(t) * f_2(t)$ 的时域范围为两信号的时域范围之和

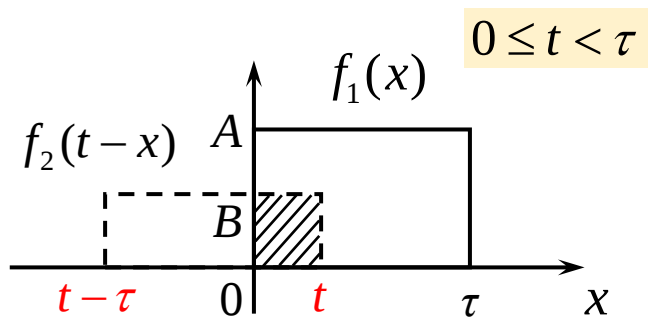
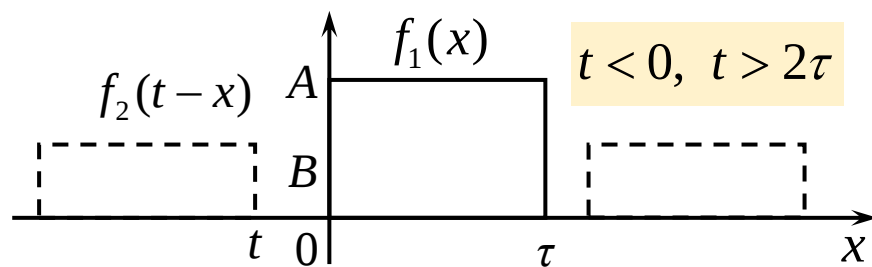
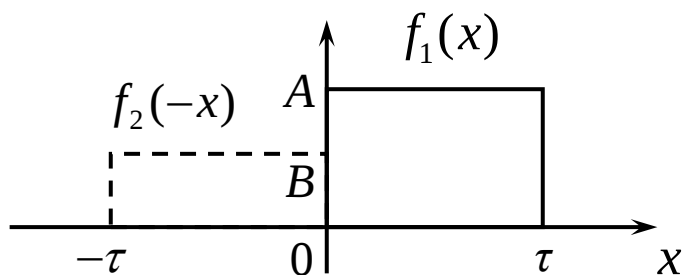
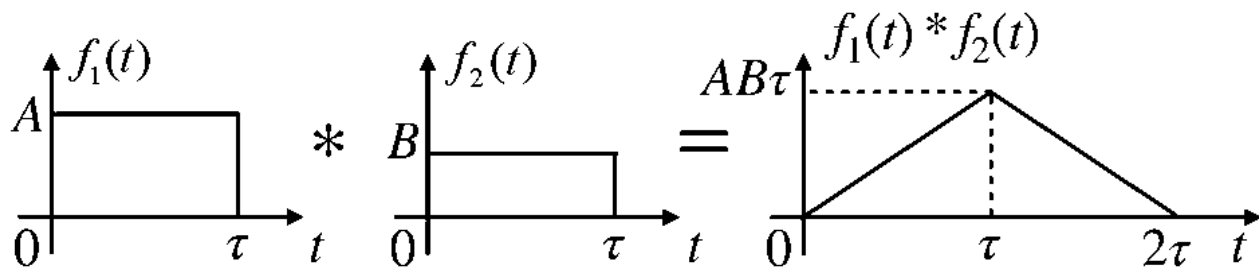
例题12

信号 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 如图, 已知 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 求 $y(6)$ 。



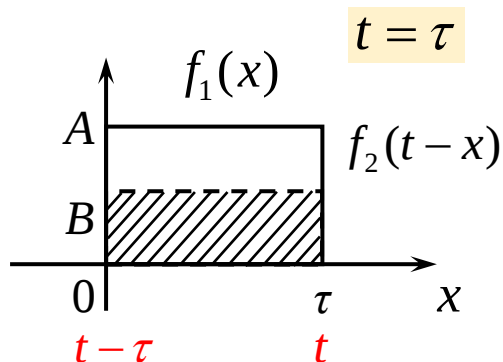
$$y(6) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(6-\tau) d\tau = \int_3^4 2 \times 1 d\tau + \int_4^5 2 \times 2 d\tau = 6$$

例题13 通过卷积形成三角脉冲。



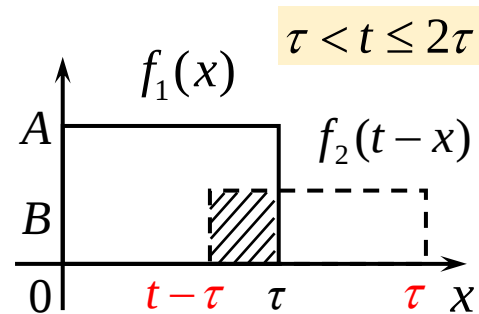
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^t d\tau = ABt$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^\tau d\tau = AB\tau \quad \text{顶点}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= AB \int_{t-\tau}^\tau d\tau = AB(2\tau - t)$$

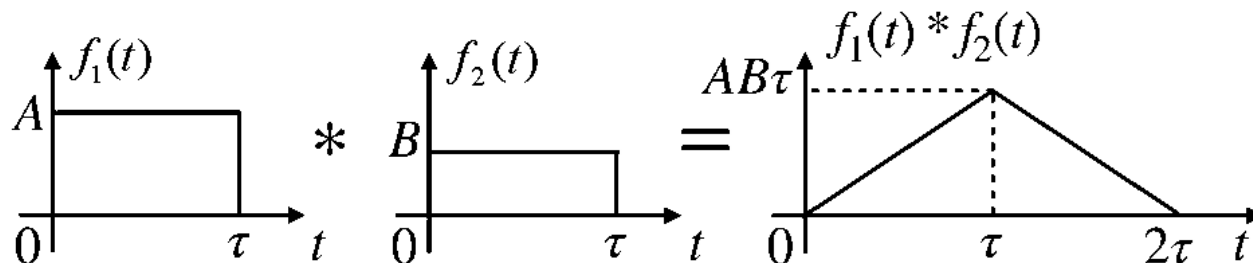
■ 卷积积分的求解

相关结论

两个等宽的门函数卷积

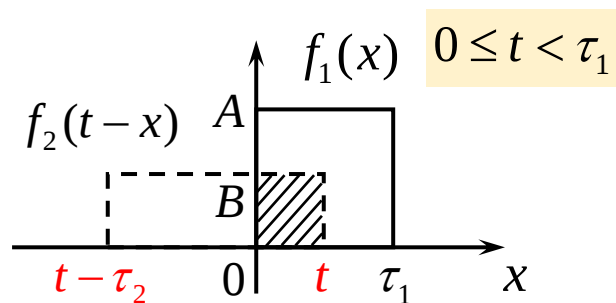
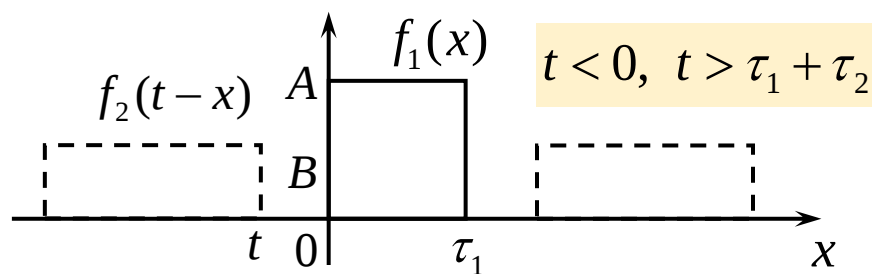
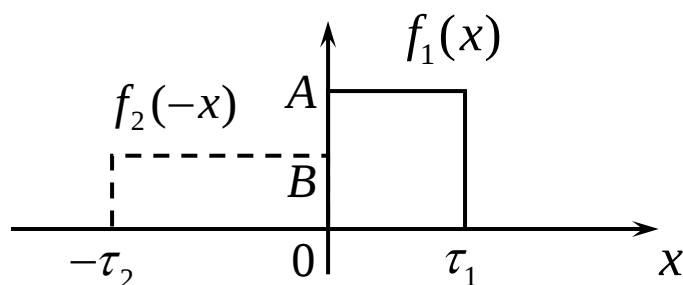
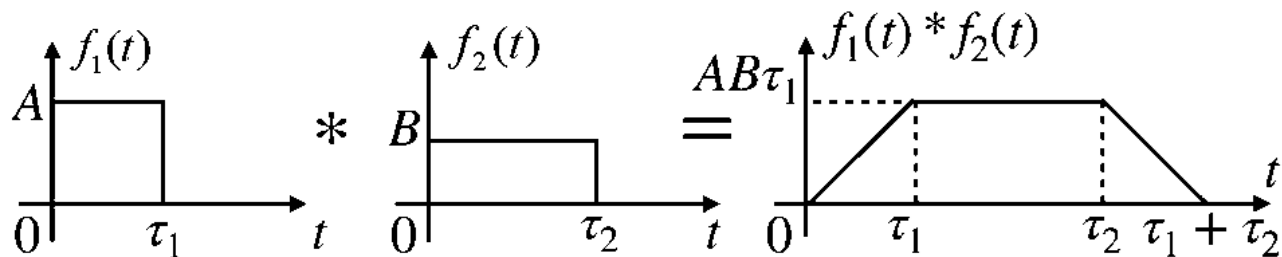
结果为等腰三角形

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} ABt & 0 \leq t < \tau \\ AB(2\tau - t) & \tau \leq t \leq 2\tau \\ 0 & t \leq 0, t > 2\tau \end{cases}$$



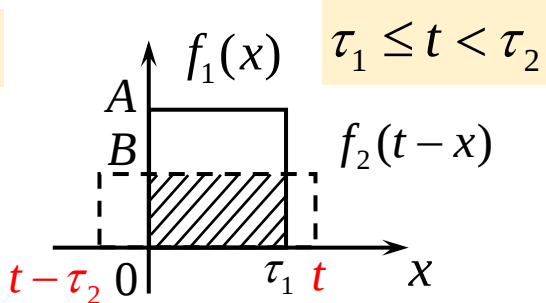
- 三角形高度：两门函数幅度之积乘以门宽。
- 三角形的底：门函数宽度之和。
- 时间范围：卷积积分的范围为两函数时间范围之和。

例题14 通过卷积形成梯形脉冲。



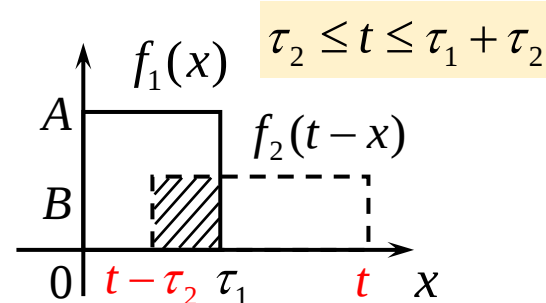
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^t d\tau = ABt$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= AB \int_0^{\tau_1} d\tau = AB\tau_1 \quad \text{顶点}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

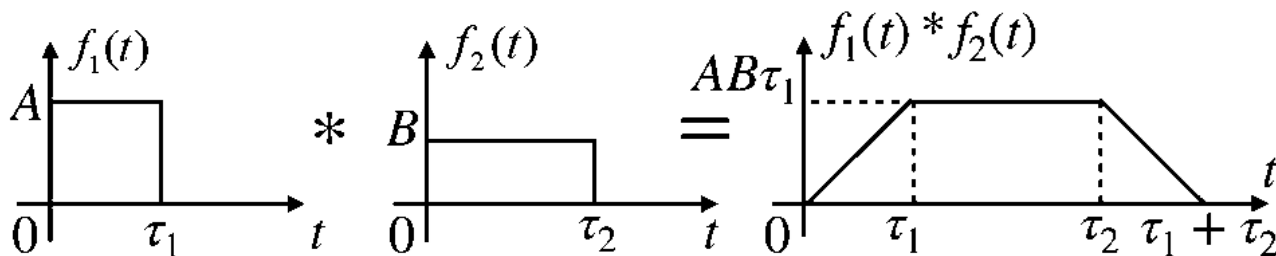
$$= AB \int_{t-\tau_2}^{\tau_1} d\tau = AB(\tau_1 + \tau_2 - t)$$

■ 卷积积分的求解

相关结论

两个不等宽的门函数卷积结果
为等腰梯形

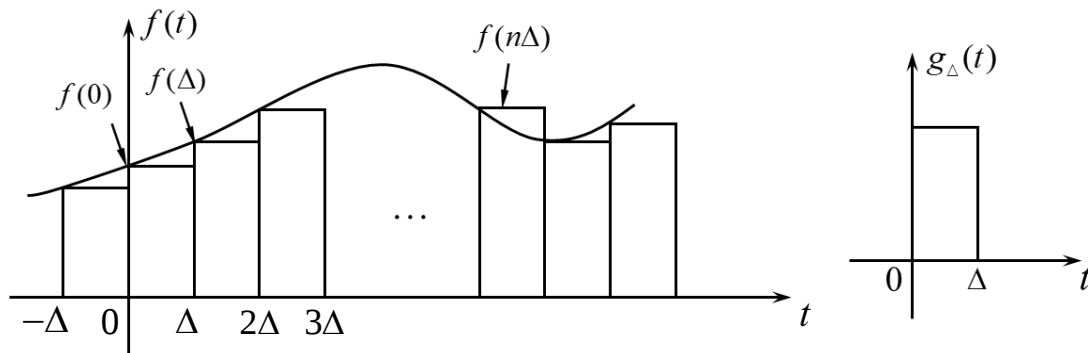
$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} ABt & 0 \leq t < \tau_1 \\ AB\tau_1 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ AB(\tau_1 + \tau_2 - t) & \tau_2 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2 \\ 0 & t < 0, t > \tau_1 + \tau_2 \end{cases}$$



- 梯形高度：两门函数幅度之积乘以窄门门宽。
- 梯形上底：门函数宽度之差的绝对值。
- 梯形下底：门函数宽度之和。
- 时间范围：卷积积分的范围为两函数时间范围之和。

■ 卷积积分的性质

➤ 任意信号的分解 $f(t) \approx \hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)g_{\Delta}(t-n\Delta) \cdot \Delta$



$\Delta \rightarrow 0$ $\Delta \rightarrow d\tau$ 分割间隔无限密集, 变为无穷小量

$n\Delta \rightarrow \tau$ 离散时间 $\rightarrow$ 连续时间

$g_{\Delta}(t-n\Delta) \rightarrow \delta(t-\tau)$ 门函数 $\rightarrow$ 冲激信号

$f(n\Delta) \rightarrow f(\tau)$ 离散取值 $\rightarrow$ 连续函数

$$f(t) = f(t) * \delta(t)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)g_{\Delta}(t-n\Delta) \cdot \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

任意信号可以用一系列单位冲激信号及其移位信号的线性组合

■ 卷积积分的性质

➤ 借助单位冲激响应与卷积积分求解系统的零状态响应

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

单位冲激响应: $\delta(t) \longrightarrow h(t)$

时不变性: $\delta(t - \tau) \longrightarrow h(t - \tau)$

齐次性: $e(\tau) \delta(t - \tau) \longrightarrow e(\tau) h(t - \tau)$

叠加性: $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau = e(t) * h(t)$$

连续系统的零状态响应为激励信号和系统单位冲激响应的卷积积分

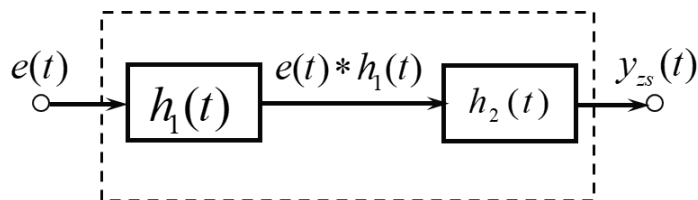
$$y_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

■ 卷积积分的性质

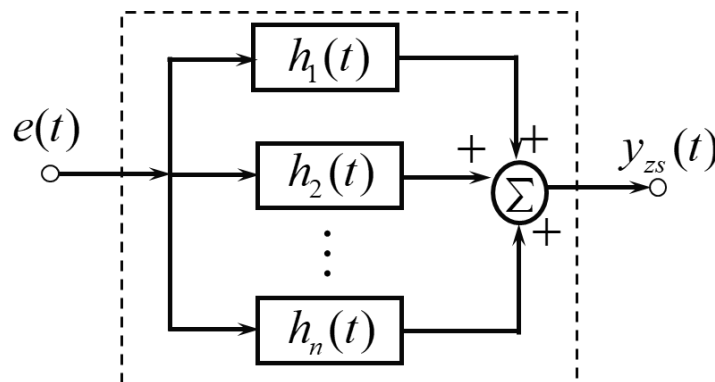
代数性质

- 交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ 卷积积分中反折函数可以任选。
- 分配律 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$
- 结合律 $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$

复合系统的冲激响应



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \cdots + h_n(t)$$

n 个**级联子系统**的等效冲激响应为
 n 个子系统**冲激响应卷积**

n 个**并联系统**的等效冲激响应为
 n 个子系统**冲激响应之和**

■ 卷积积分的性质

移位性质

$$f_1(t) * f_2(t - t_0) = f_1(t - t_0) * f_2(t) = f(t - t_0)$$

$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_2) * f_2(t - t_1) = f(t - t_1 - t_2)$$

参与卷积的两个函数，有一个移位，整体就会产生相同的移位

例题15 已知 $f_1(t) = e^{-2t} \varepsilon(t+1)$, $f_2(t) = \varepsilon(t-3)$, 且 $e^{-2t} \varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\varepsilon(t)$
求卷积积分 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

■ 卷积积分的性质

奇异函数的卷积特性

➤ 冲激信号的卷积

$$\begin{cases} f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t) \\ f(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0) \end{cases}$$

函数卷积冲激函数等于其本身，卷积移位的冲激函数等于该函数本身进行移位：**重现性质**。

➤ 冲激偶信号的卷积

$$\begin{aligned} f(t) * \delta'(t) &= f'(t) \\ f(t) * \delta^{(n)}(t) &= f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

函数卷积冲激偶信号相当于对函数求导

➤ 阶跃信号的卷积

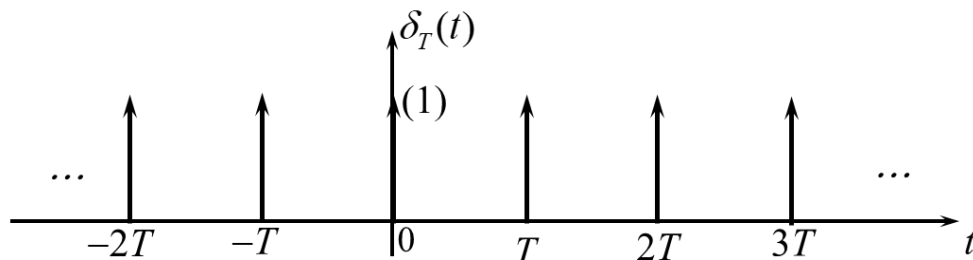
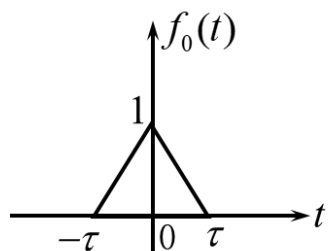
$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

函数与阶跃函数卷积，相当于对函数积分

■ 卷积积分的性质

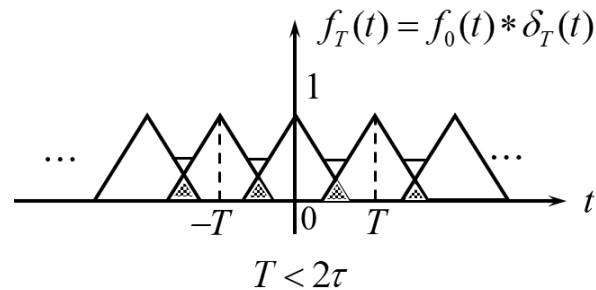
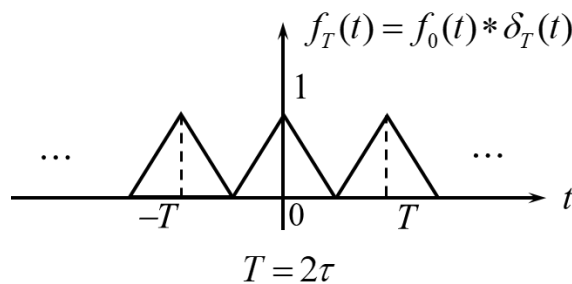
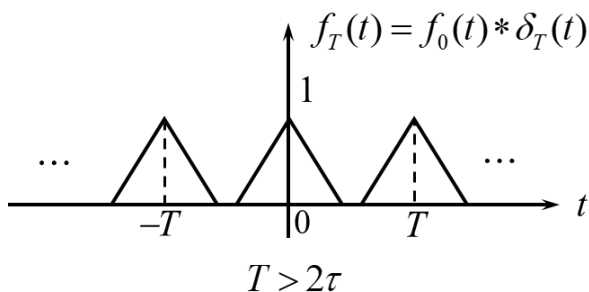
奇异函数的卷积特性

利用卷积积分构造周期信号



$$f_T(t) = f_0(t) * \delta_T(t) = f_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT)$$

可以利用第一个周期内的信号脉冲单体 $f_0(t)$ 和周期为 T 的冲激串信号的卷积积分构造周期信号。



■ 卷积积分的性质

卷积的微分与积分

➤ 微分性质: $\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \frac{d}{dt} f_2(t)$

➤ 积分性质: $\int_{-\infty}^t [f_1(x) * f_2(x)] dx = \int_{-\infty}^t f_1(x) dx * f_2(t) = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(x) dx$

对两个函数卷积积分的结果求导/积分, 等于先对其中任一函数求导/积分后再卷积。

➤ 微积分性质: $f_1(t) * f_2(t) = \frac{d}{dt} f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(x) dx = \int_{-\infty}^t f_1(x) dx * \frac{d}{dt} f_2(t)$

两个函数卷积积分的结果, 等于先对其中任一函数求导, 再对另一个函数求积分, 然后两个函数再卷积。

例题16 求解下列卷积积分。

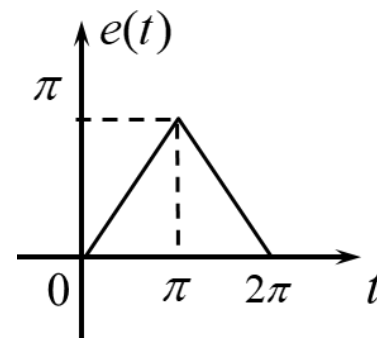
1) $e^{-t}\varepsilon(t) * \delta(3t+2)$

2) $e^{-2t}\varepsilon(t) * \delta''(t) * \varepsilon(t)$

3) $e^{-2t}\varepsilon(t) * \delta''(t-1) * [t\varepsilon(t)]$

例题17

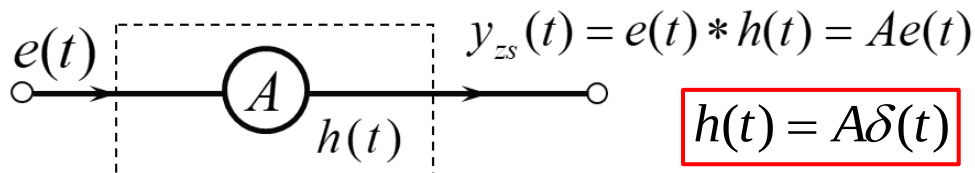
已知某线性时不变系统的冲激响应 $h(t) = \cos t \cdot \varepsilon(t)$ ，当激励为下图时，试利用卷积的性质求解系统的零状态响应。



■ 卷积积分的性质

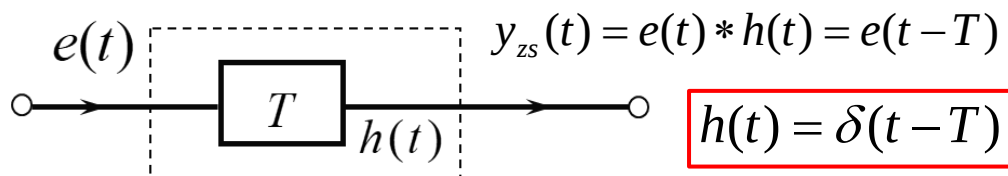
一些常用子系统的单位冲激响应

➤ 数乘器

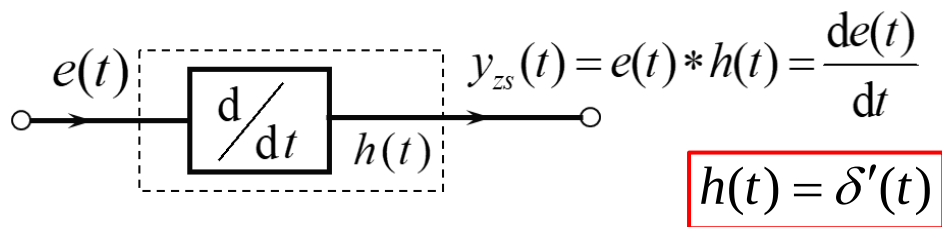


直通通路, $A = 1$, 冲激响应为 $h(t) = \delta(t)$

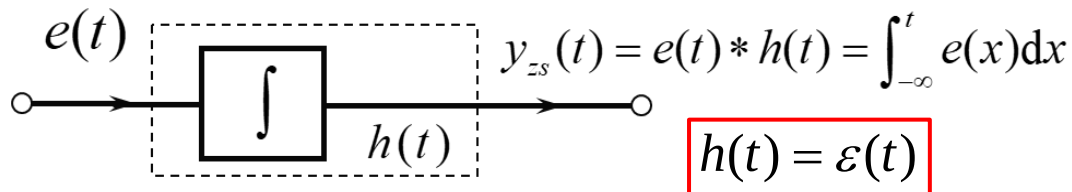
➤ 延时器



➤ 微分器

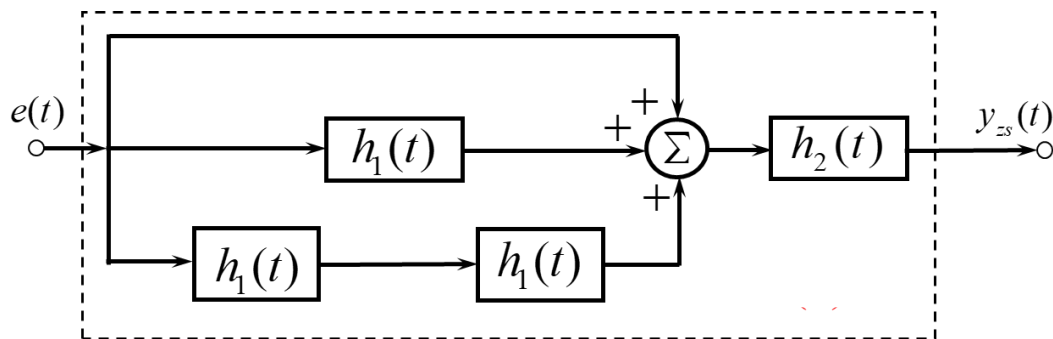


➤ 积分器



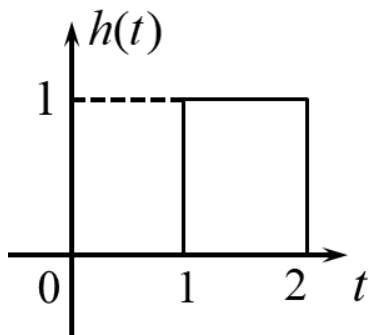
例题18

如图所示系统由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t) = \delta(t-1)$, $h_2(t) = \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-3)$ ，试求总系统的冲激响应 $h(t)$ 并画出其波形。



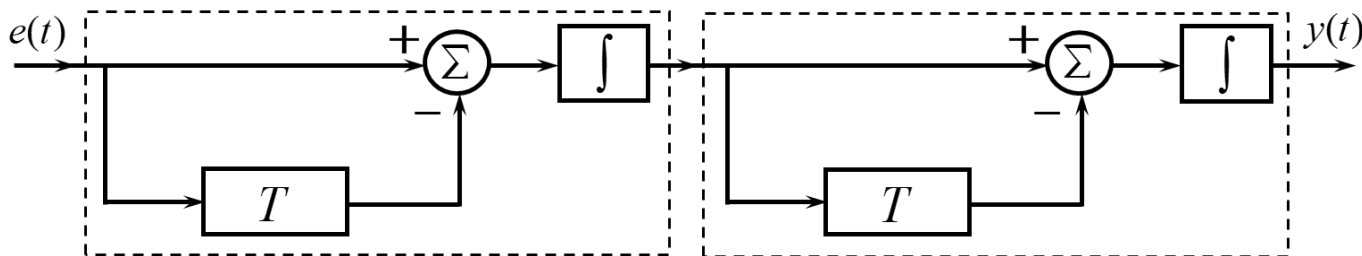
例题19

某一连续系统的冲激响应如下图所示，试用积分器、加法器和延时器（ $T = 1$ ）构成该系统。



例题20

某LTI连续系统如图，激励 $e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2kT), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，试求此系统的零状态响应并画出波形。



2.4补充：互相关函数与自相关函数

互相关和自相关函数的定义

相关与卷积的关系

■ 互相关和自相关函数的定义

为比较某信号与另一延时 τ 的信号之间的相似度，需要引入相关函数的概念，相关函数也称为相关积分，它与卷积的运算方法类似。

互相关函数

已知实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 均为能量信号，则它们之间的互相关函数定义为：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \tau) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$$

注意：角标数字，前面的信号领先时间 τ 。

互相关函数是两信号时间差 τ 的函数。

一般： $R_{12}(\tau) \neq R_{21}(\tau)$

$$\begin{cases} R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \\ R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau) \end{cases}$$

■ 互相关和自相关函数的定义

自相关函数

如果实函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是同一个信号 $f(t)$ ，此时无需区分 $R_{12}(\tau)$ 和 $R_{21}(\tau)$ ，用 $R(\tau)$ 表示，称为自相关函数，即：

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) f(t) dt$$

对自相关函数，有：

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

实函数的自相关函数是时移 τ 的偶函数。

■ 相关与卷积的关系

卷积定义式：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

互相关定义式：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \xrightarrow{t, \tau \text{ 互换}} R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

卷积和相关运算的不同之处：卷积积分中存在函数的反折，而相关运算则不需要反折，其余移位、相乘积分的运算方法相同。

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2[-(t - \tau)] d\tau = f_1(t) * f_2(-t)$$

两个实、偶函数的相关运算与卷积运算的结果相同。

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

信号与系统

第3章 连续时间信号与系统的频域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第3章 连续时间信号与系统的频域分析

3.1 连续时间周期信号的傅里叶级数

3.2 连续时间周期信号的频谱分析

3.3 连续时间信号的傅里叶变换

3.4 傅里叶变换的性质

3.5 周期信号的傅里叶变换

3.6 抽样定理

3.7 连续时间系统的频域分析

3.1 连续时间周期信号的傅里叶级数

三角形式的傅里叶级数

信号的对称性与傅里叶系数的关系

指数形式的傅里叶级数

■ 三角形式的傅里叶级数

三角形式傅里叶级数的定义

在一个周期内：① 函数连续或只有有限个第一类间断点；② 有有限个极大、极小值；③ 函数绝对可积

给定周期为 T 的周期信号 $f(t)$ ，当它满足狄利克雷条件时，可以表示为 $(t_0, t_0 + T)$ 上完备正交函数集合 $\{1, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t\} (n \rightarrow \infty, \Omega = 2\pi/T)$ 中各个函数的线性组合，即

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{直流分量}} + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{a_n \cos n\Omega t}_{n\text{次余弦分量}} + \underbrace{b_n \sin n\Omega t}_{n\text{次正弦分量}})$$

$$\text{基波角频率: } \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{基波频率: } f = \frac{1}{T}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad \text{直流分量} \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt, \quad n=1, 2, \dots \quad \text{余弦分量系数} \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt, \quad n=1, 2, \dots \quad \text{正弦分量系数} \end{array} \right.$$

■ 三角形式的傅里叶级数

三角级数的直流、基波、谐波分量

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

同频率项合并：

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad a_0 = A_0, \quad a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = -A_n \sin \varphi_n$$

上式表明：任何满足狄利克雷条件的周期信号都可以分解为直流分量、基波分量和无穷多项谐波分量之和。其中各次谐波分量的角频率必然是**基波角频率的整数倍**。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \quad \text{直流分量} \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \\ A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) \quad \text{基波分量} \quad (n=1) \\ A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad n \text{ 次谐波分量} \quad (n \neq 1) \end{array} \right.$$

A_n : n 次谐波振幅

φ_n : n 次谐波相位

■ 三角形式的傅里叶级数

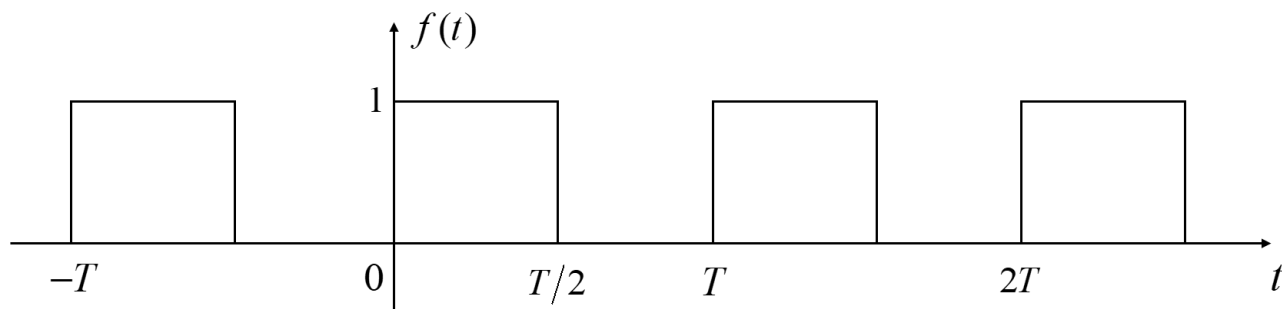
傅里叶系数的奇偶性

将系数视为谐波次数 n 或者 n 倍基波角频率 $n\Omega$ 的函数，以 n 或者 $n\Omega$ 为自变量进行分析：

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt & a_{-n} = a_n \quad n \text{ 的偶函数} \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt & b_{-n} = -b_n \quad n \text{ 的奇函数} \end{array} \right.$$

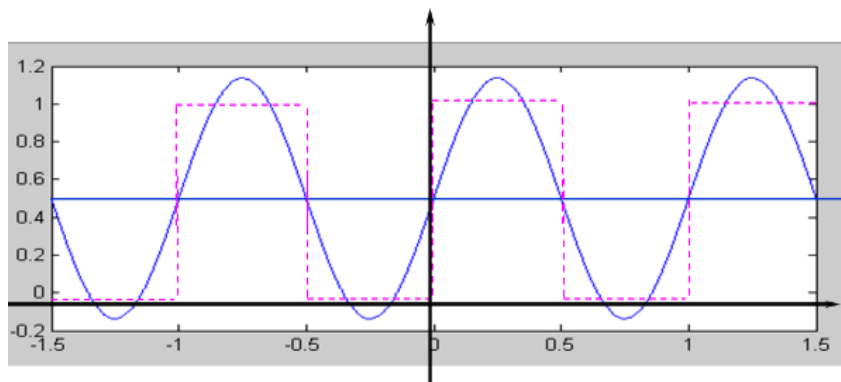
$$\left\{ \begin{array}{ll} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & A_{-n} = A_n \quad n \text{ 的偶函数} \\ \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} & \varphi_{-n} = -\varphi_n \quad n \text{ 的奇函数} \end{array} \right.$$

例题1 把下图所示的周期信号展开为三角形式的傅里叶级数。

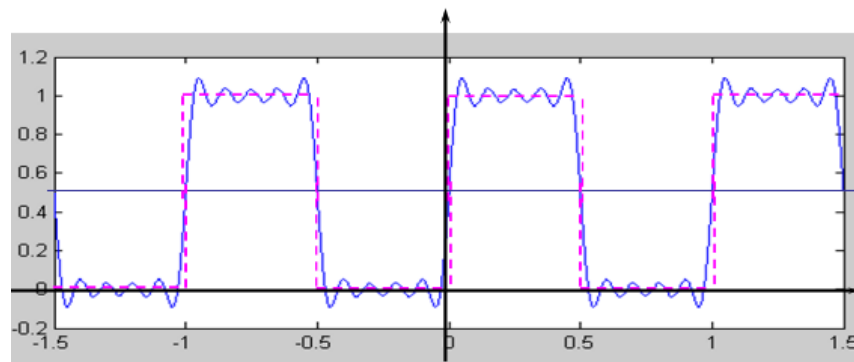


$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \cdots + \frac{1}{2n+1} \sin (2n+1)\Omega t + \cdots \right], \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

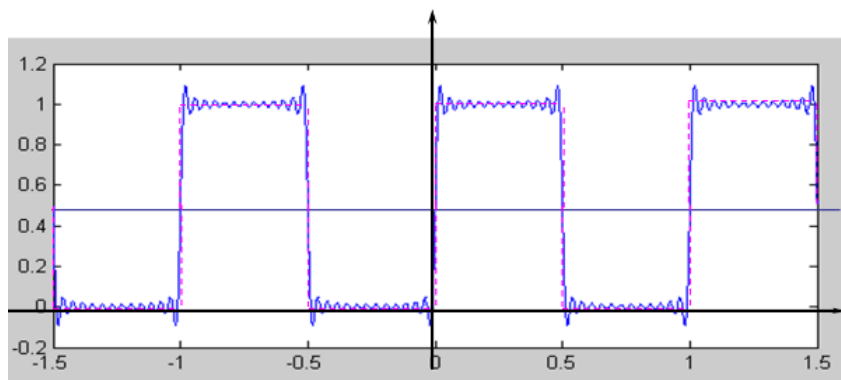
- 周期方波信号，低频谐波振幅大，构成波形主体，高频谐波振幅小，影响波形细节，所包含高次谐波越多，波形边缘越陡峭。



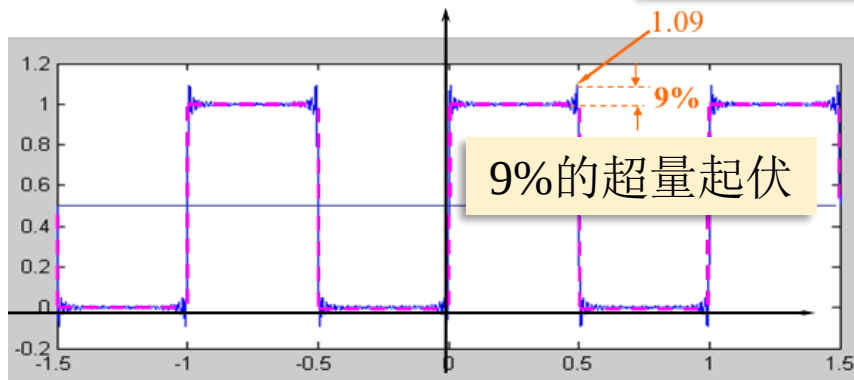
直流 + 基波



直流 + 5个谐波 吉布斯现象



直流 + 13个谐波



直流 + 31个谐波

■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为 t 的偶函数

$$f(-t) = f(t)$$

$f(t)\cos n\Omega t$ 为偶函数（偶 $\times$ 偶 $\rightarrow$ 偶）

$f(t)\sin n\Omega t$ 为奇函数（偶 $\times$ 奇 $\rightarrow$ 奇）

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = 0$$

此时，傅里叶级数不含正弦项 $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t$

信号为 t 的奇函数

$$f(-t) = -f(t)$$

$f(t)\cos n\Omega t$ 为奇函数（奇 $\times$ 偶 $\rightarrow$ 奇）

$f(t)\sin n\Omega t$ 为偶函数（奇 $\times$ 奇 $\rightarrow$ 偶）

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = 0 \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt$$

此时，傅里叶级数不含直流和余弦项 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$

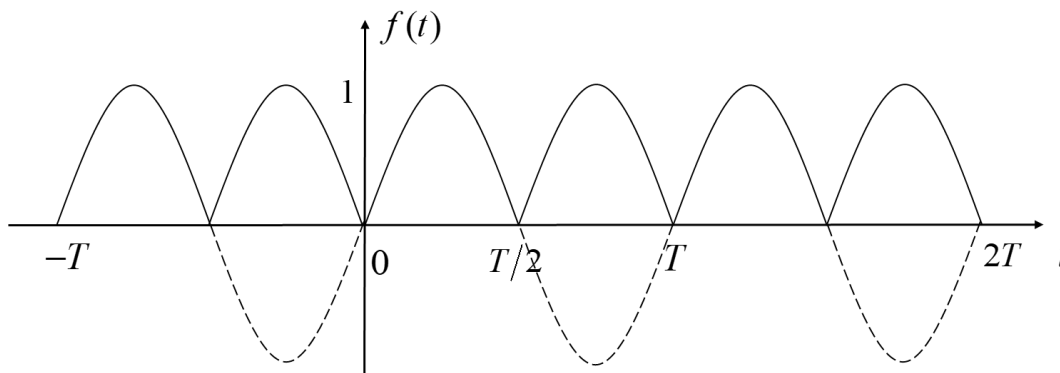
■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为半波对称函数

$f(t) = f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ 信号沿时间轴平移半个周期以后与原波形完全重合

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Omega' = \frac{2\pi}{T/2} = \frac{4\pi}{T} = 2\Omega$$

信号实际周期为 $T/2$ ， 2Ω 为实际的基波角频率，故只含 Ω 的偶次谐波

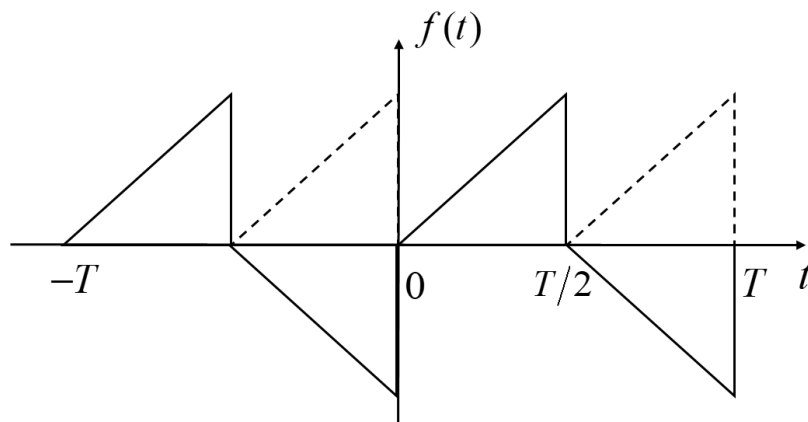


此时傅里叶级数只含偶次谐波，不含奇次谐波，又称偶谐函数。

■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为半波镜像对称函数

$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ 信号平移半个周期以后与原波形关于横轴对称



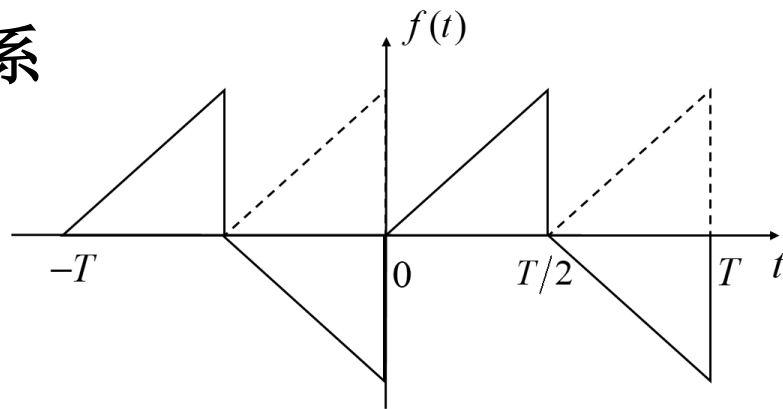
$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2n} = \cdots = b_0 = b_2 = \cdots = b_{2n} = \cdots = 0$$

$$a_1, a_3, \cdots, a_{2n+1}, \cdots, b_1, b_3, \cdots, b_{2n+1}, \cdots \neq 0$$

此时傅里叶级数只含奇次谐波，不含偶次谐波，又称奇谐函数。

■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

信号为半波镜像对称函数



区间 $(0, T)$ 内, 信号表示为 $f_0(t) - f_0(t - \frac{T}{2})$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \cos n\Omega t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T f_0(t - \frac{T}{2}) \cos n\Omega t dt \right]$$

$$\text{令 } \tau = t - \frac{T}{2}, \text{ 则 } t = \tau + \frac{T}{2}, t \in (\frac{T}{2}, T) \rightarrow \tau \in (0, \frac{T}{2}), d\tau = dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \cos n\Omega t dt - \int_0^{\frac{T}{2}} f_0(\tau) \cos(n\Omega \tau + n\pi) d\tau \right] = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \cos n\Omega t dt, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\text{同理: } b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f_0(t) \sin n\Omega t dt, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

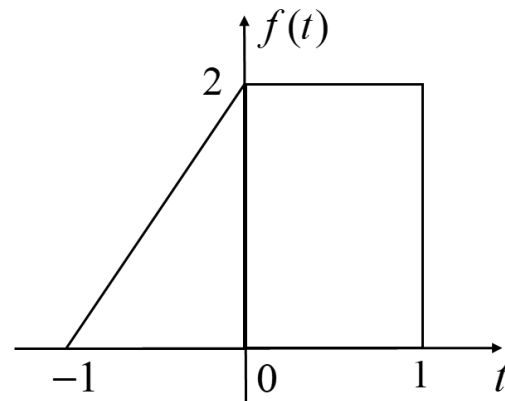
■ 信号的对称性与傅里叶系数的关系

任意信号分解为偶分量和奇分量之和

$$f(t) = \underbrace{\frac{f(t) + f(-t)}{2}}_{\text{偶分量}} + \underbrace{\frac{f(t) - f(-t)}{2}}_{\text{奇分量}} = f_{ev}(t) + f_{od}(t)$$

$$\text{偶分量 } f_{ev}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \text{奇分量 } f_{od}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

例题2 求图示函数的奇分量和偶分量。



■ 指数形式的傅里叶级数

指数形式傅里叶级数的定义

给定周期为 T 的周期信号 $f(t)$ ，当它满足狄利克雷条件时，可以表示为 $(t_0, t_0 + T)$ 上完备正交函数集合 $\{e^{jn\Omega t}\} (n \rightarrow \infty, \Omega = \frac{2\pi}{T})$ 中各个函数的线性组合，即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

指数形式傅里叶级数中出现了负频率，负频率没有实际的物理意义，它的出现完全是采用复指数信号集合表示周期信号的结果，是数学分析的过程，当正负频率合并在一起时才能合成实际的频率分量。

■ 指数形式的傅里叶级数

指数形式与三角形式傅里叶系数的关系

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt - j \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt \\ &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \end{aligned}$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2} (a_{-n} - jb_{-n}) = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \quad \begin{cases} a_n = F_n + F_{-n} \\ b_n = j(F_n - F_{-n}) \end{cases}$$

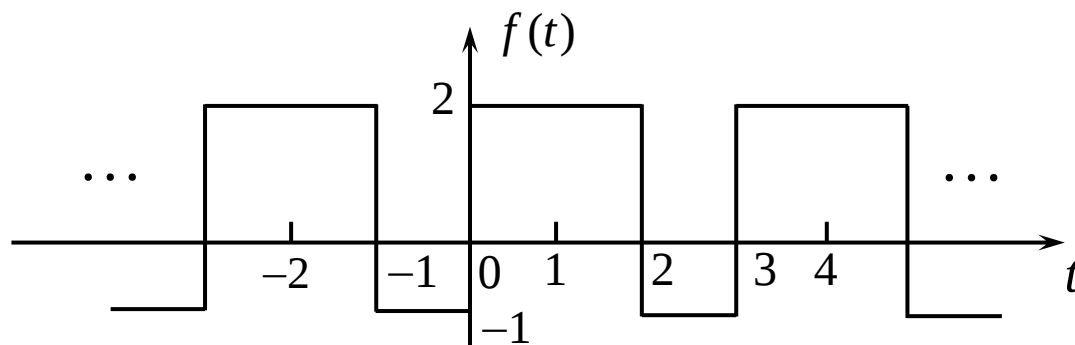
$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \quad |F_{-n}| = |F_n| \quad n \text{ 的偶函数}$$

$$\angle F_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = \varphi_n \quad \varphi_{-n} = -\varphi_n \quad n \text{ 的奇函数}$$

$$F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$$

例题3

求如图所示周期信号的指数形式的傅里叶级数。



3.2 连续时间周期信号的频谱分析

周期信号的频谱

周期信号频谱的特点

■ 周期信号的频谱

频谱的概念

为直观表示信号各频率分量的分布及其所占比重，引入频谱的概念。

$$\begin{array}{cc} \underline{A_n, |F_n| \sim n\Omega} & \underline{\varphi_n \sim n\Omega} \\ \text{幅频特性} & \text{相频特性} \end{array}$$

频谱 { 幅度谱（幅频特性曲线）：幅度 A_n ($|F_n|$)随离散频率 $n\Omega$ 变化的图
相位谱（相频特性曲线）：相位 φ_n 随离散频率 $n\Omega$ 变化的图

■ 周期信号的频谱

单边频谱与双边频谱

- 单边频谱：信号分解为三角级数时可以用单边频谱表示，此时频谱中只有正频率分量。

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

- 双边频谱：信号分解为指数型级数时可以用双边频谱表示，此时频谱中同时有正、负频率分量。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

- 单边频谱和双边频谱之间的关系 $F_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n}$

单边幅度谱除直流分量之外幅度减半且关于纵轴偶对称即可得到双边幅度谱，单边相位谱关于纵轴奇对称即可得到双边相位谱。

■ 周期信号的频谱

作频谱图的说明

- 作单边频谱图时，需注意周期信号各分量必须是余弦 $\cos$ 函数相加的形式，若所给信号里有 $\sin$ 形式的分量，则须通过诱导公式转化成 $\cos$ 函数的形式；若有符号为负的 $\cos$ 项，则需要通过三角公式转化为正项的 $\cos$ 函数进行分析；
- 当指数形式的傅里叶级数系数为非零实数时，相位只有0（对应正系数）和 π （对应负系数）两种情况。此时幅度谱和相位谱可以用同一个频谱图表示，正谱线代表0相位，负谱线代表 π 相位。

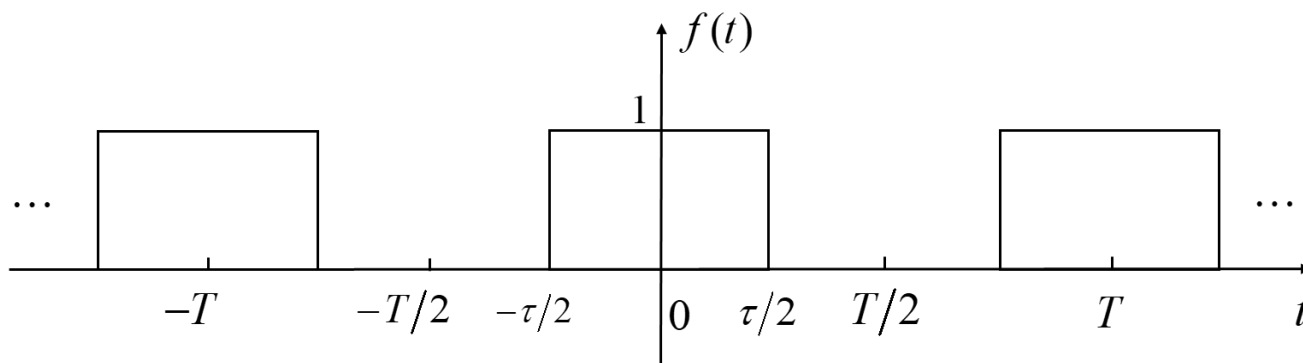
例题4 已知某一周期信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

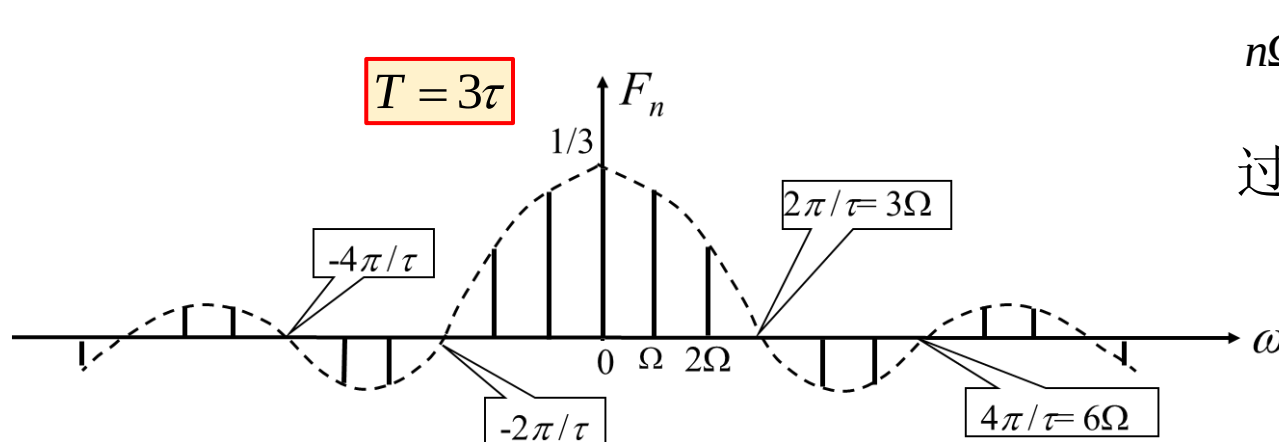
试求基波角频率 Ω ，谐波的次数，并作出该信号的单边谱和双边谱。

■ 周期信号频谱的特点

以周期矩形脉冲信号为例讨论周期信号频谱的特点。



$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t} dt = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(n\Omega \frac{\tau}{2}\right)$$



$$n\Omega \frac{\tau}{2} = \pm m\pi (m = 1, 2, \dots)$$

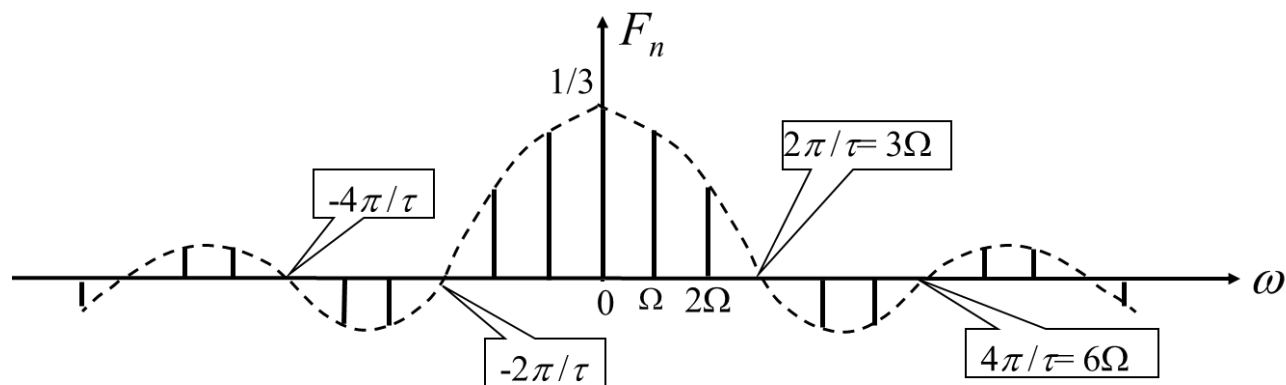
$$\text{过零点: } n\Omega = \pm \frac{2m\pi}{\tau}$$

$$= \pm \frac{2m\pi}{T/3} = m \cdot 3\Omega$$

$$\text{过零点: } \pm 3\Omega, \pm 6\Omega, \dots$$

■ 周期信号频谱的特点

以周期矩形脉冲信号为例讨论周期信号频谱的特点。

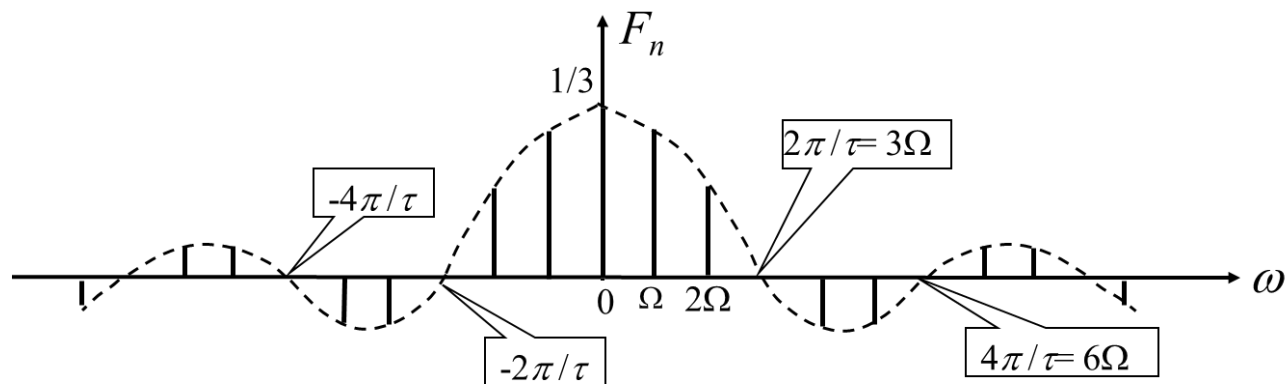


- **离散性：**谱线只出现在 $\omega = 0, \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$ 的离散频率点上，谱线最小间隔为 Ω ，为离散谱；
- **谐波性：**周期信号所含频率分量的频率均为信号角频率 Ω ，即基波角频率的整数倍；
- **收敛性：**谐波分量幅度随着 n 的增大而减小， $n \rightarrow \infty$ 时， $F_n \rightarrow 0$ 。

其他周期信号的频谱也具备这三个特点。

■ 周期信号频谱的特点

周期信号的有效频带宽度（带宽）



➤ 有效频带宽度：离散频谱的第一过零点带宽，有两种表示形式：

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} (\text{rad/s}) \quad B_f = \frac{1}{\tau} (\text{Hz})$$

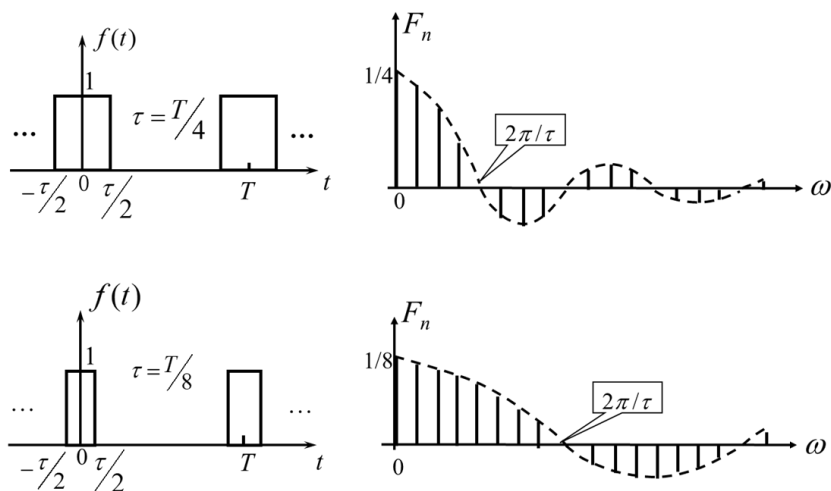
信号的有效带宽内集中了信号绝大部分的谐波能量，若丢失有效带宽之外的谐波成分，对信号影响不明显；脉冲时域宽度越小，传输信号速率越高，但同时所需带宽越大，是一对矛盾。

■ 周期信号频谱的特点

脉冲宽度与信号周期对频谱的影响

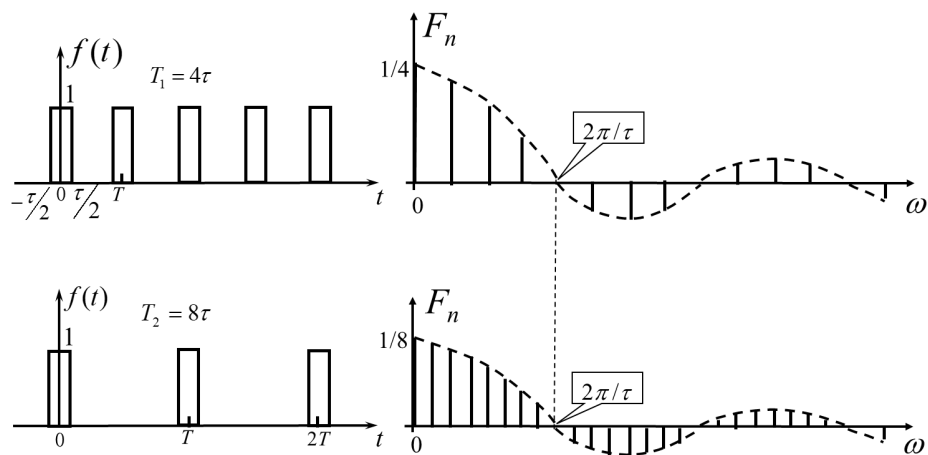
➤ 周期相同、脉冲宽度不同

周期相同，谱线的间隔相同；
脉冲宽度越窄，则第一个过零点
频率越高，信号的带宽变宽，同
时各分量幅度减小。



➤ 脉冲宽度相同、周期不同

脉冲宽度相同，第一过零点
频率相同，信号的带宽相同；周
期变大，则 Ω 变小，谱线间隔变
密集，同时各分量幅度减小。



■ 周期信号频谱的特点

矩形周期信号频谱参数：总结

谱线间隔 $\Omega = \frac{2\pi}{T} (\text{rad/s})$ $f = \frac{1}{T} (\text{Hz})$ 谱线间隔由信号周期决定。

有效带宽 $B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} (\text{rad/s})$ $B_f = \frac{1}{\tau} (\text{Hz})$ 带宽由脉冲的宽度决定。

➤ 注：周期无限大时，谱线无限密集，幅度无限小，需用密度描述。

例题5

已知周期矩形脉冲信号，其脉冲宽度为2ms，周期为10ms，求该信号频谱的谱线间隔和有效频带宽度。

■ 周期信号频谱的特点

周期信号的功率谱

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

➤ 周期信号的功率

$$P = \underbrace{\left(\frac{A_0}{2}\right)^2}_{\text{直流功率}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}}_{\text{谐波功率之和}} \quad \xrightarrow{|F_n| = \frac{A_n}{2}} \quad P = |F_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

三角级数 指数级数

上述两个功率表达式称为功率信号的帕斯瓦尔(Parseval)恒等式，说明了周期信号平均功率和信号频谱中各分量功率的关系。

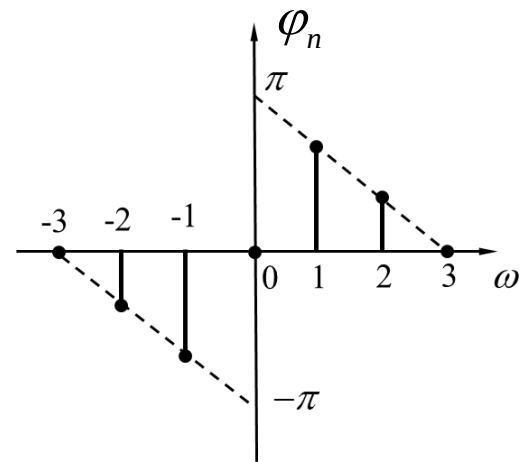
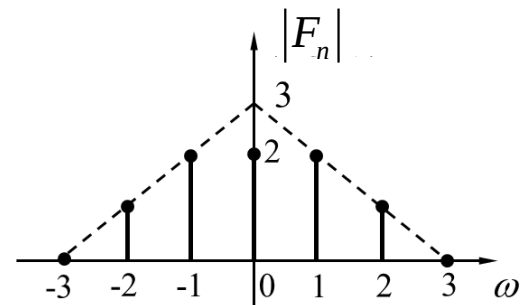
➤ 周期信号功率谱定义

对于不同的频率分量， $|F_n|^2$ 或 $\frac{A_n^2}{2}$ 随离散频率 $n\Omega$ 分布的特性称为周期信号的功率谱。

例题6

已知周期信号 $f(t)$ 的双边频谱如图所示。

- 1) 写出 $f(t)$ 指数及三角形式的傅里叶级数；
- 2) 画出 $f(t)$ 的功率谱，并求解信号的功率。



3.3 连续时间信号的傅里叶变换

傅里叶变换的定义

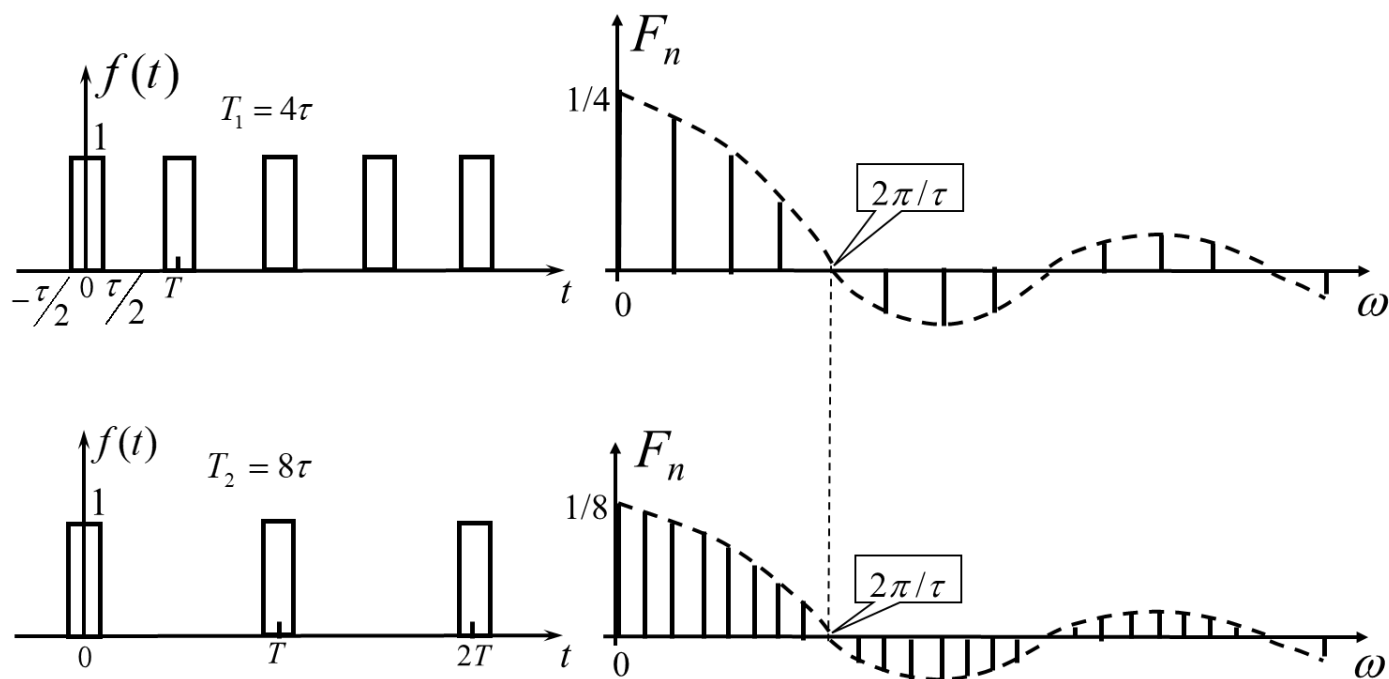
频谱密度函数

常见信号的傅里叶变换

■ 傅里叶变换的定义

频谱密度的引入

- 对周期信号而言，信号周期 T 越大，频谱谱线越密集，幅度减小；信号周期 T 无限大时，周期信号变为非周期信号，谱线无限密集，幅度无穷小，离散谱过渡为连续谱，需改用密度描述频谱特性。



■ 傅里叶变换的定义

从傅里叶级数到傅里叶变换

傅里叶正变换

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$T \rightarrow \infty$  $\Omega \rightarrow d\omega$ 频谱间隔无限密集, 变为无穷小量

$n\Omega \rightarrow \omega$ 离散频率 $\rightarrow$ 连续频率

频谱密度: 单位频率的信号频谱值

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n / f = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \boxed{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}$$

■ 傅里叶变换的定义

从傅里叶级数到傅里叶变换

傅里叶反变换

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T e^{jn\Omega t}$$

$T \rightarrow \infty$  $\Omega \rightarrow d\omega$ 频谱间隔无限密集, 变为无穷小量

$n\Omega \rightarrow \omega$ 离散频率 $\rightarrow$ 连续频率

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_n T = F(j\omega)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

■ 傅里叶变换的定义

傅里叶变换对 傅里叶变换对 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

➤ 傅里叶正变换 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

➤ 傅里叶反变换 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$ $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$

傅里叶变换存在的充分条件

信号满足绝对可积条件: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$

常用结论 $F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

$$f(0) = f(t)|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$$

■ 频谱密度函数

频谱密度函数 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

信号为实函数: $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt} - j \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}$
 $= R(\omega) + jX(\omega)$ 频谱为复函数, 含**实部**和**虚部**

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad R(-\omega) = R(\omega) \quad \omega \text{ 的偶函数}$$
$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad X(-\omega) = -X(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数}$$

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad |F(-\omega)| = |F(\omega)| \quad \omega \text{ 的偶函数} \quad \text{幅频特性}$$

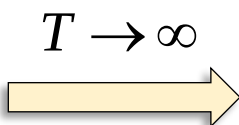
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数} \quad \text{相频特性}$$

■ 频谱密度函数

傅里叶级数

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$



傅里叶变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

离散频谱

$$F_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n$$

$$\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

幅频特性

相频特性

频谱密度

$$F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$

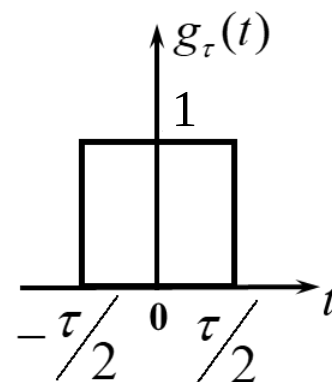
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

■ 常见信号的傅里叶变换

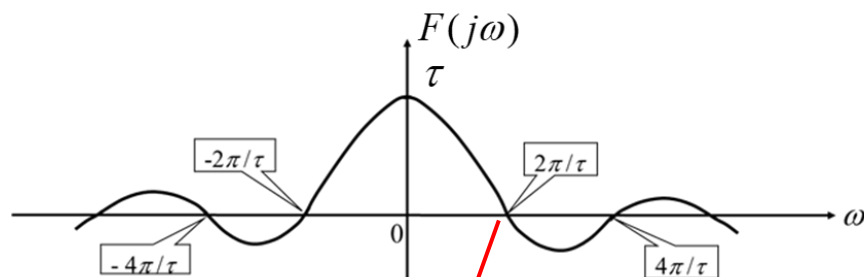
矩形脉冲（门函数）

$$g_{\tau}(t) = \left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



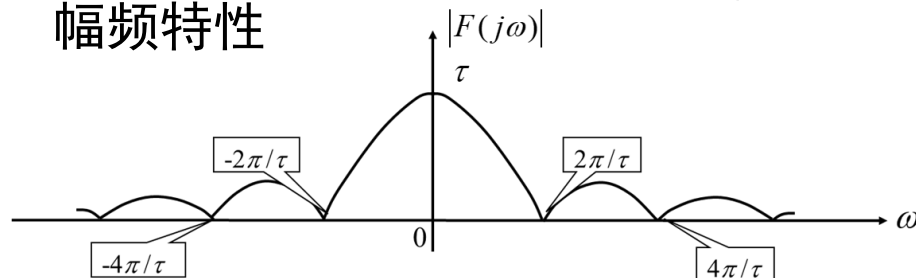
实频谱：幅度、相位合二为一



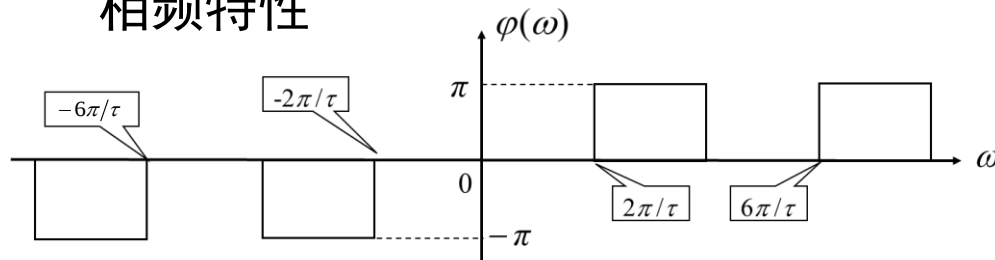
有效带宽

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \text{ (rad/s)} \quad B_f = \frac{1}{\tau} \text{ (Hz)}$$

幅频特性



相频特性

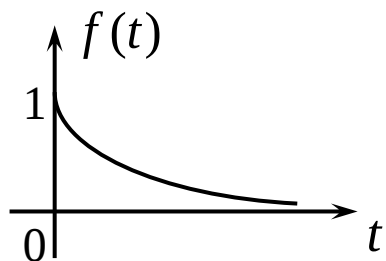


时域有限信号，频域上无限展宽

■ 常见信号的傅里叶变换

单边指数信号

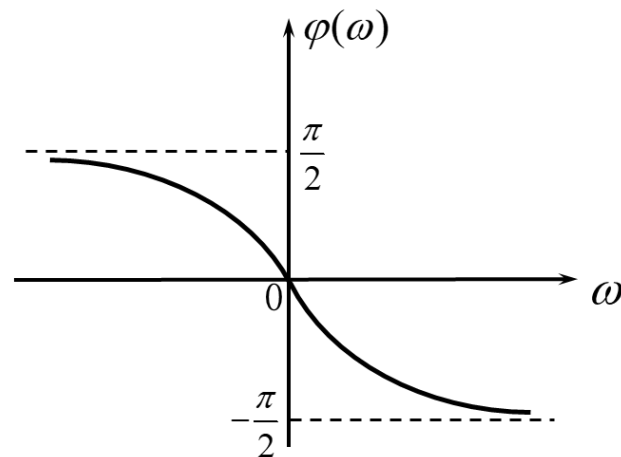
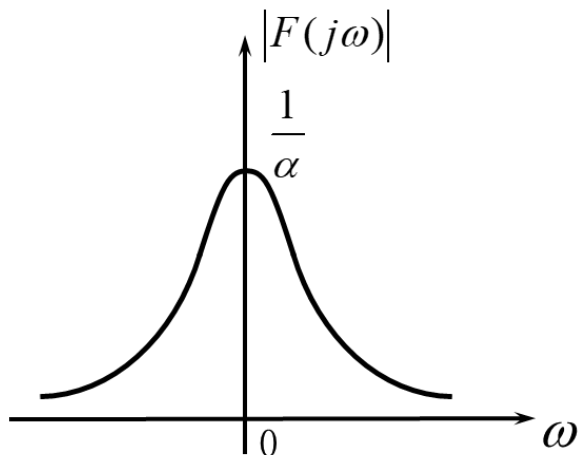
$$f(t) = e^{-\alpha t} \varepsilon(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$



$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

幅频特性 $|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$

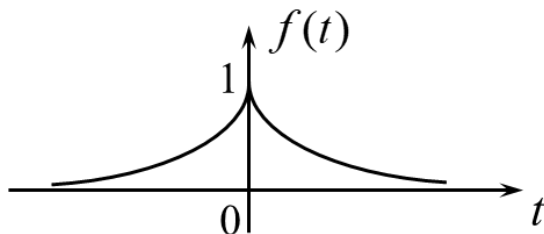
相频特性 $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$



■ 常见信号的傅里叶变换

偶双边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

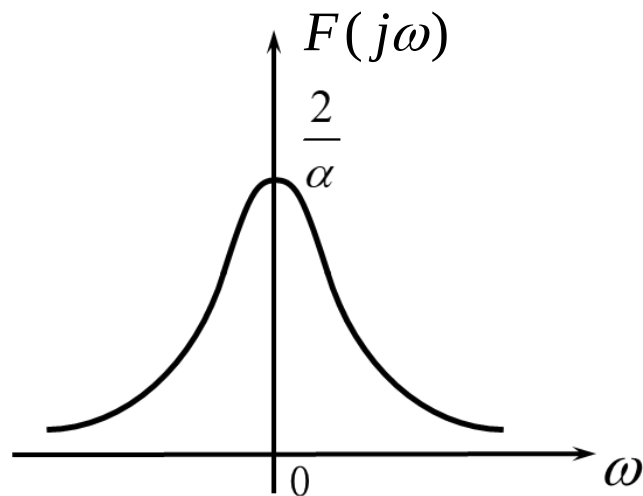


$$e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

频谱为恒正的实频谱，相位恒为0

幅频特性 $|F(j\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

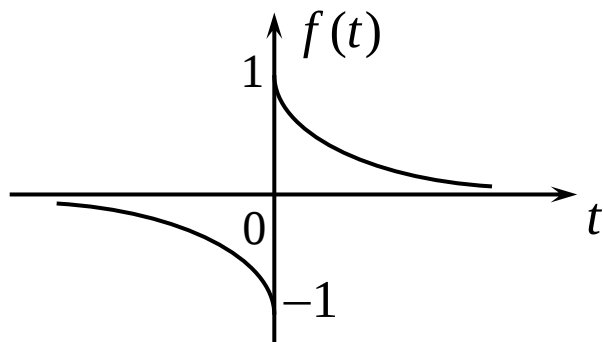
相频特性 $\varphi(\omega) = 0$



■ 常见信号的傅里叶变换

奇双边指数信号

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

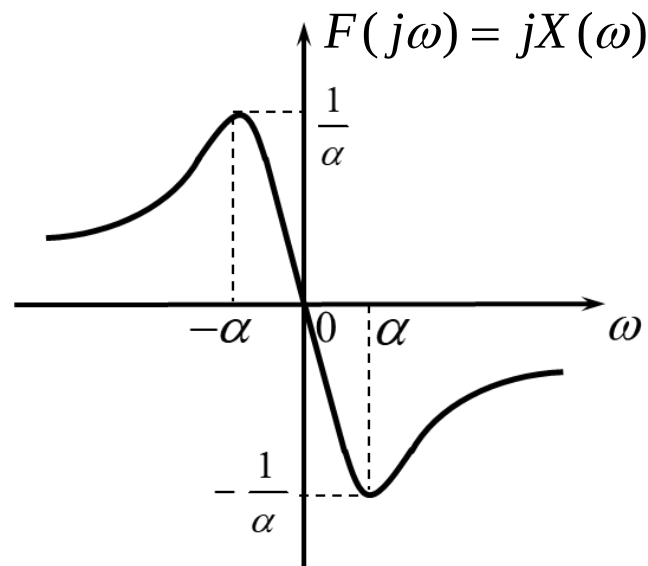


$$\begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

频谱为虚频谱

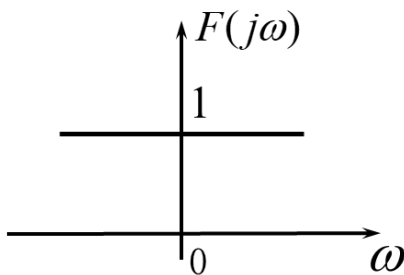
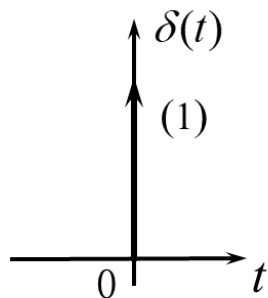
幅频特性 $|F(j\omega)| = \frac{2|\omega|}{\alpha^2 + \omega^2}$

相频特性 $\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases}$



■ 常见信号的傅里叶变换

冲激信号及其导数

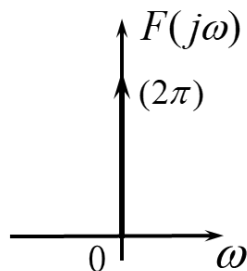
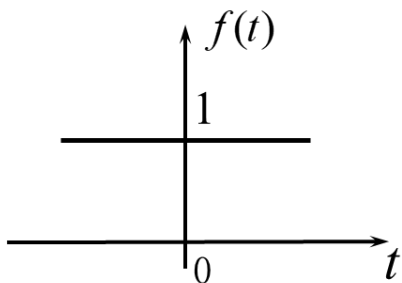


$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$$

单位直流信号 $f(t)=1$



$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

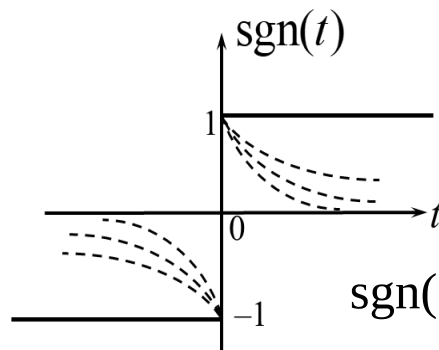
$$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$$

- 冲激信号和常数的时、频特性存在对称性

■ 常见信号的傅里叶变换

符号函数

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(t)$$

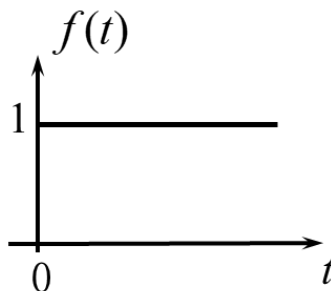
$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

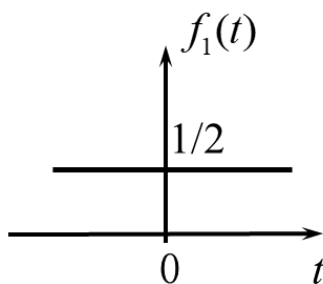
阶跃函数

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

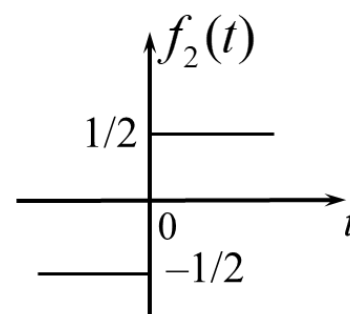
$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



=



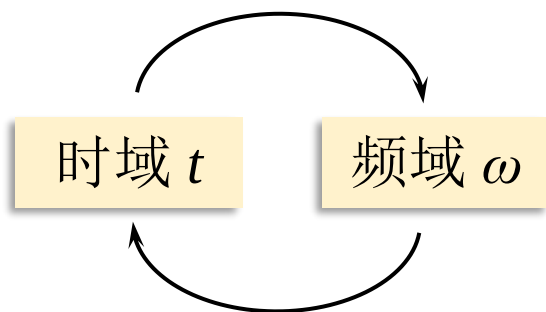
+



■ 总结

傅里叶正变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶反变换

- 门函数 $g_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
- 单边指数信号 $e^{-\alpha t}\varepsilon(t) (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}$
- 偶双边指数信号 $e^{-\alpha|t|} (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
- 奇双边指数信号
$$\begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases} (\alpha > 0) \leftrightarrow \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$
- 冲激信号及其导数
$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \delta'(t) \leftrightarrow j\omega \quad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$$
- 直流信号 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
- 符号函数 $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$
- 阶跃函数 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

3.4 傅里叶变换的性质

线性性质

奇偶性质

时移性质

频移性质

尺度变换性质

对称性（互易性）

时域卷积性质

频域卷积性质

时域微分性质

时域积分性质

频域微分性质

频域积分性质

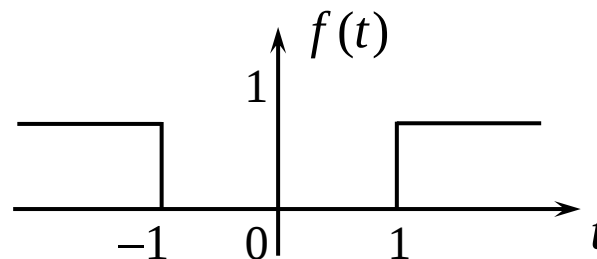
能量定理

■ 线性性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega) \quad af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$$

线性性质是傅里叶变换最基本的性质，说明傅里叶变换是线性变换。

例题7 求图示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换。



■ 奇偶性

$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则: $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$ 研究时、频域的奇偶虚实关系。

➤ 对于实信号 $f(t)$ $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{R(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{X(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad R(-\omega) = R(\omega) \quad \omega \text{ 的偶函数}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad X(-\omega) = -X(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数}$$

$f(t) \sim$ 实函数、偶函数



$F(j\omega) \sim$ 实函数、偶函数

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = 0 \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = R(\omega)$$

$f(t) \sim$ 实函数、奇函数



$F(j\omega) \sim$ 虚函数、奇函数

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = 0 \quad F(j\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = jX(\omega)$$

■ 奇偶性

➤ 对于虚信号 $f(t) = jg(t)$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} jg(t)e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt}_{\text{red underline}} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt}_{\text{blue underline}} = \underline{R(\omega)} + j\underline{X(\omega)}$$

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt \quad R(-\omega) = -R(\omega) \quad \omega \text{ 的奇函数}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt \quad X(-\omega) = X(\omega) \quad \omega \text{ 的偶函数}$$

$f(t) \sim$ 虚函数、偶函数



$F(j\omega) \sim$ 虚函数、偶函数

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt = 0$$

$$F(j\omega) = j \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt = jX(\omega)$$

$f(t) \sim$ 虚函数、奇函数



$F(j\omega) \sim$ 实函数、奇函数

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos \omega t dt = 0$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin \omega t dt = R(\omega)$$

■ 奇偶性

➤ 实信号奇、偶分量的频谱

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad \begin{cases} f_{ev}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \leftrightarrow \operatorname{Re}[F(j\omega)] = R(\omega) \\ f_{od}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \leftrightarrow j \operatorname{Im}[F(j\omega)] = jX(\omega) \end{cases}$$

$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega)$

记忆口诀：时域偶分量对应频域实部，时域奇分量对应频域虚部乘 j 。

$$R(\omega) = \frac{1}{2} [\underline{F(j\omega)} + \underline{F^*(j\omega)}] \leftrightarrow \frac{1}{2} [\underline{f(t)} + \underline{f(-t)}] = f_{ev}(t)$$
$$jX(\omega) = \frac{1}{2} [\underline{F(j\omega)} - \underline{F^*(j\omega)}] \leftrightarrow \frac{1}{2} [\underline{f(t)} - \underline{f(-t)}] = f_{od}(t)$$

$$f_{ev}(t) \leftrightarrow \operatorname{Re}[F(j\omega)] = R(\omega) \quad f_{od}(t) \leftrightarrow j \operatorname{Im}[F(j\omega)] = jX(\omega)$$

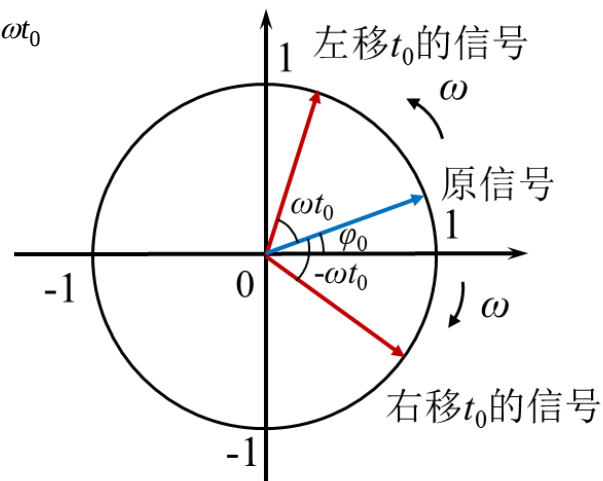
■ 时移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } f(t \pm t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$$

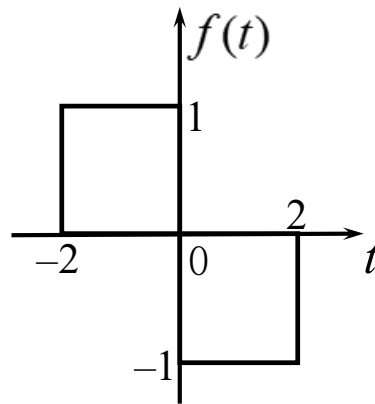
信号时移引起频域**附加线性相位**，幅度不变。

信号左移 t_0 : $f(t) \rightarrow f(t+t_0)$ ，相位超前 ωt_0

信号右移 t_0 : $f(t) \rightarrow f(t-t_0)$ ，相位滞后 ωt_0



例题8 求图示信号 $f(t)$ 的傅里叶变换。



■ 频移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)]$$

$$f(t) \rightarrow f(t)e^{j\omega_0 t} \quad F(j\omega) \rightarrow F[j(\omega - \omega_0)] \quad \text{信号频谱右移 } \omega_0$$

$$f(t) \rightarrow f(t)e^{-j\omega_0 t} \quad F(j\omega) \rightarrow F[j(\omega + \omega_0)] \quad \text{信号频谱左移 } \omega_0$$

例题9 求信号 $e^{\pm j\omega_0 t}$, $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换。

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\begin{cases} \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \\ \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 t &\leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ \sin \omega_0 t &\leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

例题10 求解信号 $f(t)\cos\omega_0t$ 和 $f(t)\sin\omega_0t$ 的傅里叶变换。

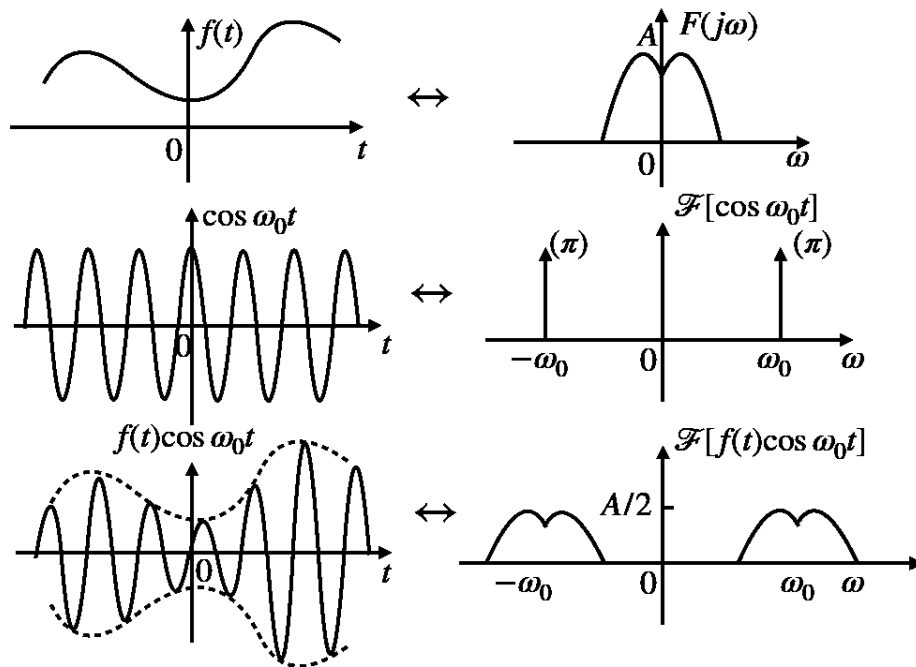
$$f(t)\cos\omega_0t = f(t) \cdot \frac{1}{2} [e^{j\omega_0t} + e^{-j\omega_0t}]$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2} \{ F[j(\omega + \omega_0)] + F[j(\omega - \omega_0)] \}$$

$$f(t)\sin\omega_0t = f(t) \cdot \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0t} - e^{-j\omega_0t}]$$

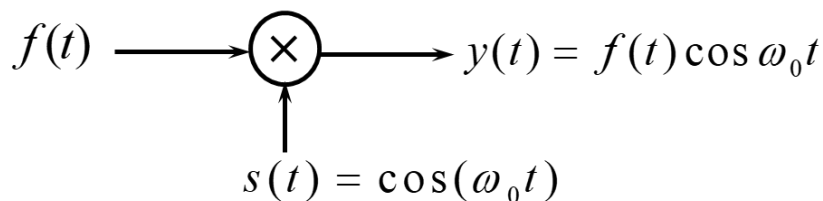
$$\leftrightarrow \frac{j}{2} \{ F[j(\omega + \omega_0)] - F[j(\omega - \omega_0)] \}$$

调制特性及已调信号的频谱



时域调制

频域频谱搬移



$f(t)$: 调制信号 (含信息)
 $s(t)$: 载波信号 (单一高频率的信号)
 $y(t)$: 已调信号

■ 尺度变换性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right), a \neq 0, a \in R$$

若 $a = -1$, 则: $f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$, 称为时间倒置定理

记忆口诀:

- $a > 1$, 时域压缩, 频域展宽, 幅度变小;
- $0 < a < 1$, 时域展宽, 频域压缩, 幅度变大;
- 若 $a < 0$, 还需要时域频域同时翻转。

矛盾: 时域压缩可以提高传输速度, 但所需带宽也相应提高

时移、频移、尺度变换性质经常综合在一起出题。需注意: 时域内对单独的 t 变化, 频域内对单独的 ω 变化。

$$e^{j\omega_0 t} f(at+b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega-\omega_0}{a}\right) e^{j\frac{\omega-\omega_0}{a}b}$$

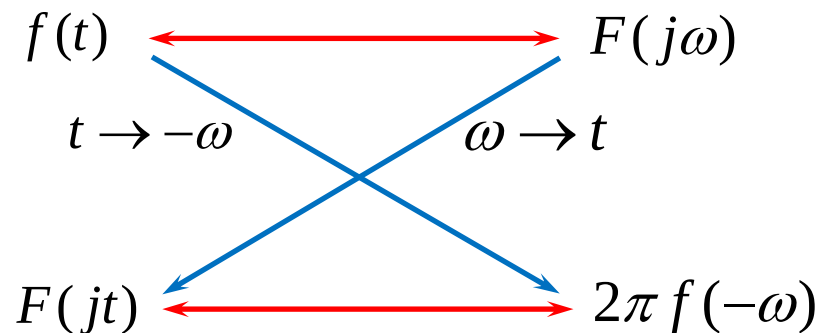
例题11 已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 求 $e^{-j4t} f(2-3t)$ 的傅里叶变换。

例题12 求 $f(t) = 3e^{-(3+2j)t} \varepsilon(t+1)$ 的傅里叶变换。

■ 对称性

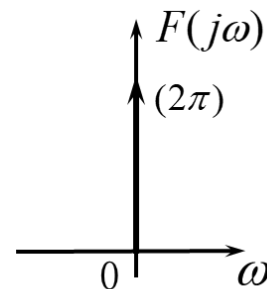
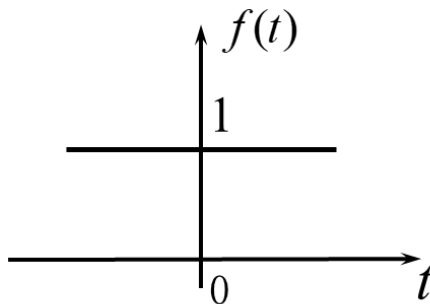
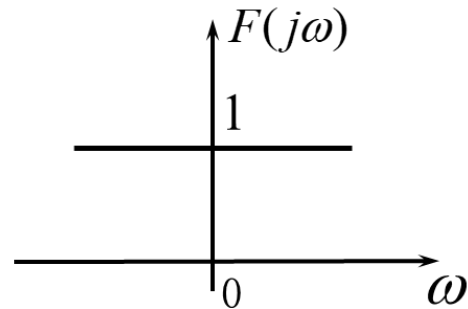
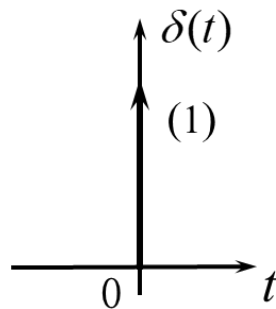
$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\text{则: } F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

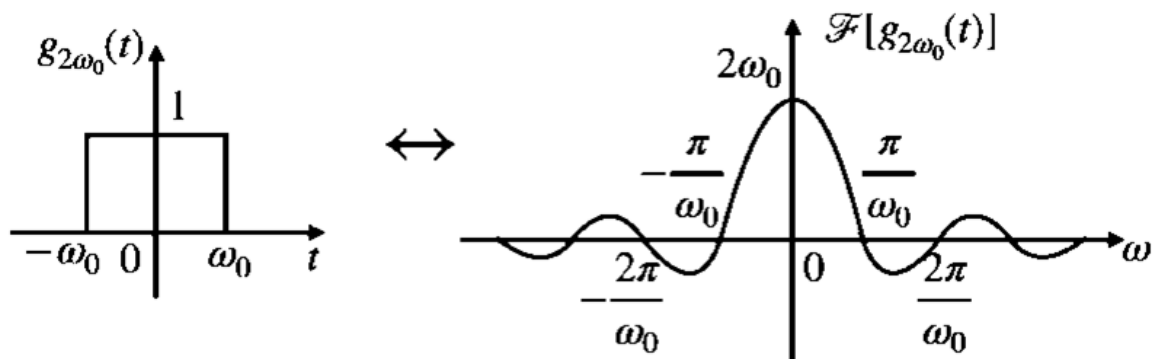


$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

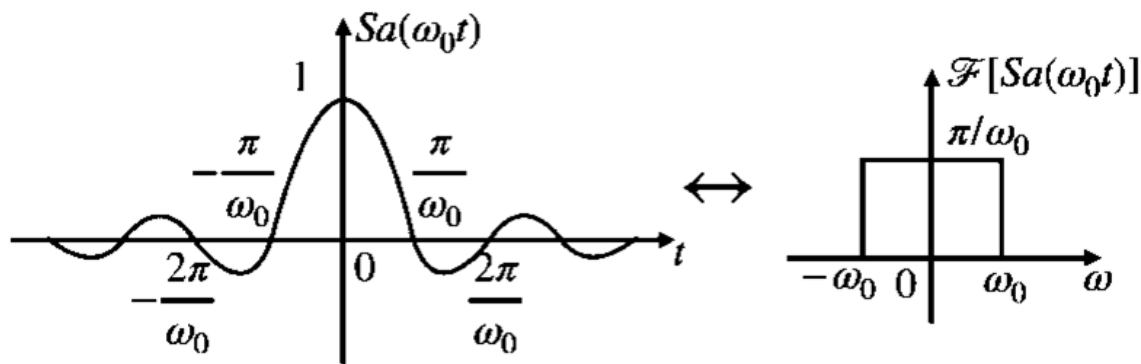
$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



例题13 求信号 $f(t) = \text{Sa}(\omega_0 t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$ 的傅里叶变换。



$$\text{Sa}(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} g_{2\omega_0}(\omega)$$



$$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \leftrightarrow g_{2\omega_0}(\omega)$$

例题14 求频谱 $F(j\omega) = 2\pi e^{2\omega} \varepsilon(-\omega)$ 的傅里叶反变换。

例题15 求信号 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的傅里叶变换。

■ 对称性

傅里叶变换时频对称性总结

时域	频域	对应变换
周期、连续信号	离散、非周期频谱	连续傅里叶级数
非周期、连续信号	连续、非周期频谱	连续傅里叶变换
周期、离散信号	离散、周期频谱	离散傅里叶级数
非周期、离散信号	连续、周期频谱	离散时间傅里叶变换

周期  离散

非周期  连续

有限  无限

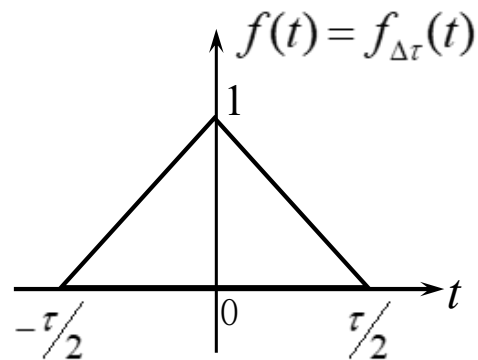
■ 时域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \quad \text{则: } f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

记忆口诀：时域卷积，频域相乘。

$$e(t) \leftrightarrow E(j\omega), \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega) \quad \text{则: } y_{zs}(t) = e(t) * h(t) \leftrightarrow Y_{zs}(j\omega) = E(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

例题16 求图示三角波信号的傅里叶变换。

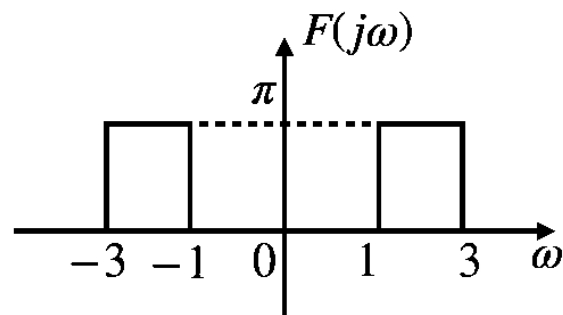


■ 频域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \quad \text{则: } f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$$

记忆口诀：时域相乘，频域卷积。

例题17 求图示频谱的傅里叶反变换。



例题18 求解信号 $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$ 的傅里叶变换。

■ 时域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } \frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow j\omega F(j\omega), \frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

理解: $\frac{d}{dt} f(t) = \underbrace{f(t)}_{\downarrow} * \underbrace{\delta'(t)}_{\downarrow}$

$$\underline{F(j\omega)} \cdot \underline{j\omega} = j\omega F(j\omega)$$

例题19 求解信号 $f(t) = \frac{1}{t^2}$ 的傅里叶变换。

■ 时域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$$\text{理解: } \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \underline{f(t)} * \underline{\varepsilon(t)}$$

$\updownarrow \quad \quad \updownarrow$

$$\underline{F(j\omega)} \cdot \left[\underline{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}} \right] = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

■ 时域积分性质的使用注意事项

求导→傅里叶变换→时域积分性质

若 $f_1(t) = f'(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, 则 $f(t) \leftrightarrow \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi [\underline{f(-\infty)} + \underline{f(+\infty)}] \delta(\omega)$

$$\int_{-\infty}^t f_1(x) dx = \int_{-\infty}^t \frac{df(x)}{dx} dx = \underline{f(t)} - \underline{f(-\infty)} \leftrightarrow \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi F_1(0) \delta(\omega)$$

$$\underline{F(j\omega)} - \underline{2\pi f(-\infty)\delta(\omega)} = \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi \boxed{F_1(0)} \delta(\omega)$$

$$F_1(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} dx = f(+\infty) - f(-\infty)$$

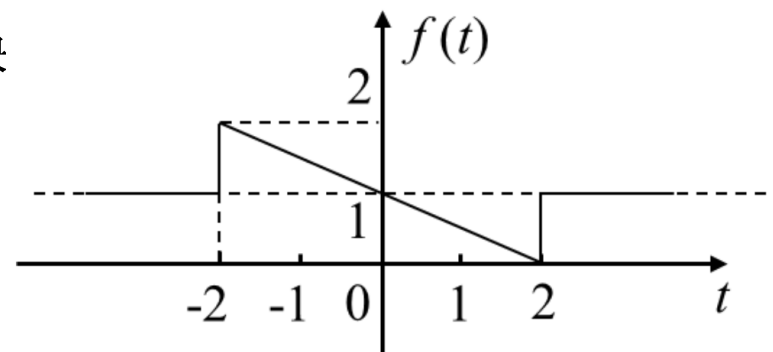
$$\therefore f(t) \leftrightarrow F(j\omega) = \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} + \pi [f(-\infty) + f(+\infty)] \delta(\omega)$$

公式改变的根本原因：先求导后积分不一定得回原函数

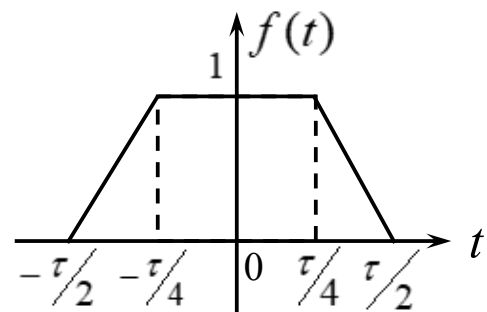
例： $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t) \leftrightarrow 1$ $\varepsilon(-\infty) + \varepsilon(+\infty) = 0 + 1 = 1$ $\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

若 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow F_n(j\omega)$, 且 $f(-\infty) + f(+\infty) = 0$, 则 $f(t) \leftrightarrow \frac{F_n(j\omega)}{(j\omega)^n}$

例题20 求解图示信号的傅里叶变换



例题21 求解图示信号的傅里叶变换。



例题22 计算积分: $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(t) \cos(2t) dt$

■ 频域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } (-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}F(j\omega), \quad (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n}F(j\omega)$$

$$\text{理解: } \frac{d}{d\omega}F(j\omega) = \underbrace{F(j\omega)}_{\downarrow} * \underbrace{\delta'(\omega)}_{\downarrow}$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$jt \leftrightarrow 2\pi\delta'(-\omega) = -2\pi\delta'(\omega)$$

$$2\pi \cdot \underbrace{f(t)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\left(-\frac{jt}{2\pi}\right)}_{\downarrow} = -jt \cdot f(t) \quad -\frac{jt}{2\pi} \leftrightarrow \delta'(\omega)$$

$$\therefore (-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}F(j\omega) \quad \text{或} \quad tf(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}F(j\omega)$$

例题23 求解信号 $f(t) = t\varepsilon(t)$, $f(t) = te^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换。

■ 频域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ 则: } \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx$$

$$f(0) = f(t)|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$$

理解: $\int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx = \underbrace{F(j\omega)}_{\updownarrow} * \underbrace{\varepsilon(\omega)}_{\updownarrow}$

$$2\pi \cdot \underbrace{f(t)}_{\updownarrow} \cdot \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{jt} \frac{1}{2\pi} \right]$$

$$= \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t)$$

$$\therefore \pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)dx$$

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\pi\delta(t) + \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi\varepsilon(-\omega) = 2\pi[1 - \varepsilon(\omega)]$$

$$2\pi\delta(t) - \pi\delta(t) + \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi - 2\pi\varepsilon(\omega)$$

$$\pi\delta(t) - \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi\varepsilon(\omega)$$

$$\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{jt} \frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \varepsilon(\omega)$$

例题24 计算积分: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} d\omega$

■ 能量定理

➤ 非周期信号能量与频谱函数的关系

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{|F(j\omega)|^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(jf)|^2 df$$

➤ 能量谱密度函数 $\varepsilon(\omega) = |F(j\omega)|^2$ 能量谱取决于信号频谱的模量

例题25 求信号 $f(t) = Sa(\omega_0 t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$ 的能量。

例题26 求信号 $f(t) = \frac{2}{t^2 + 1}$ 的能量。

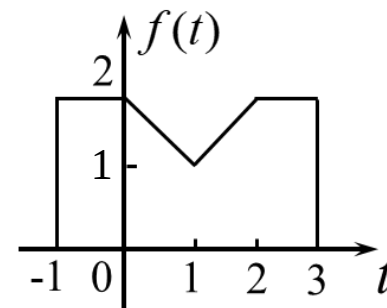
例题27 图示信号频谱函数为 $F(j\omega)$ ，不计算 $F(j\omega)$ ，试求：

1) $F(j\omega)$ 的相位函数 $\varphi(\omega)$

2) $F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0}$

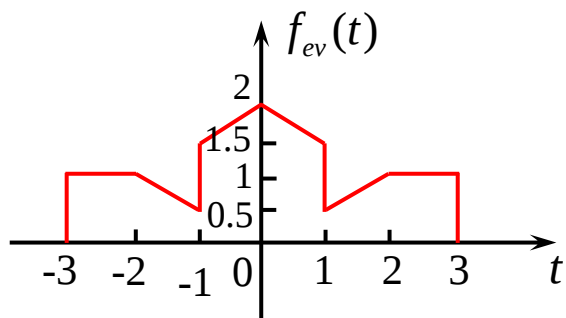
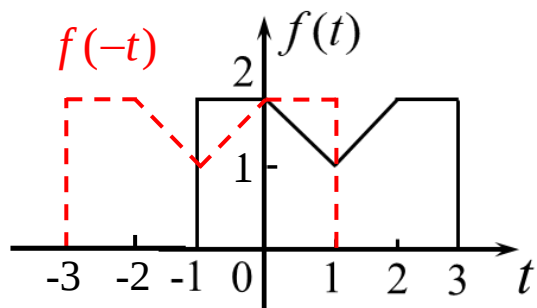
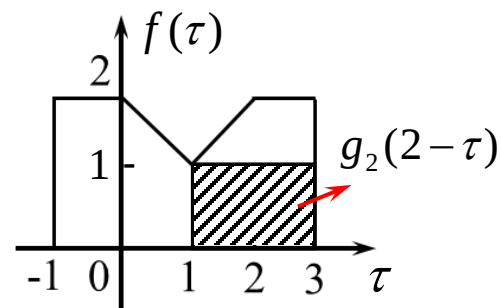
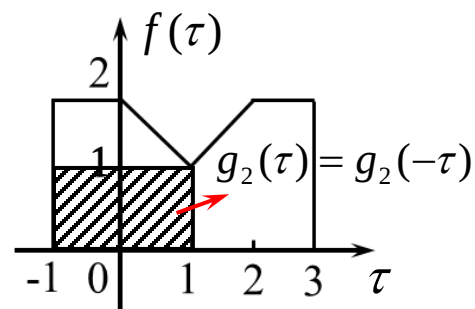
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

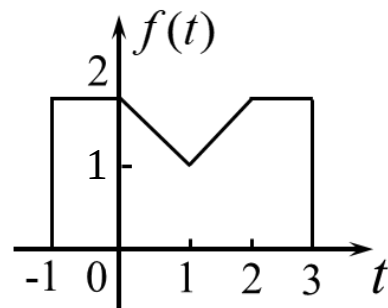


例题27 图示信号频谱函数为 $F(j\omega)$ ，不计算 $F(j\omega)$ ，试求：

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \frac{2\sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$



6) $\mathcal{F}^{-1}\{\text{Re}[F(j\omega)]\}$ 的波形



$$f_{ev}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

3.4 补充：信号的能量谱与功率谱

能量信号的相关定理与能量谱

功率信号的功率谱与维纳-辛钦定理

■ 能量信号的相关定理与能量谱

对于能量信号，互相关函数定义为：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt$$

注意：角标数字，前

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \tau) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$$

面的信号领先时间 τ

互相关函数的傅里叶变换满足：

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega), \quad \text{则:} \begin{cases} R_{12}(\tau) \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2^*(j\omega) \\ R_{21}(\tau) \leftrightarrow F_1^*(j\omega)F_2(j\omega) \end{cases}$$

对于自相关函数：

$$R(\tau) \leftrightarrow F(j\omega)F^*(j\omega) = |F(j\omega)|^2$$

自相关函数的傅里叶变换为信号的**能量谱函数**。

■ 功率信号的功率谱与维纳-辛钦定理

从信号 $f(t)$ 中截取 $|t| \leq T/2$ 的一段，得到一个 T 长截断函数 $f_T(t)$ ，可表示为：

$$f_T(t) = f(t) \left[\varepsilon\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

则 T 有限时，函数 $f_T(t)$ 为能量信号，其能量为：

$$E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(j\omega)|^2 d\omega \quad \mathcal{F}[f_T(t)] = F_T(j\omega)$$

$$P \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T} d\omega$$

功率密度谱

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}$$

功率谱为 ω 的偶函数，仅取决于频谱函数的模量。

■ 功率信号的功率谱与维纳-辛钦定理

功率信号自相关函数的定义为：

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R(\tau)] &= \mathcal{F} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \underbrace{\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) f_T(t - \tau) dt \right]}_{|F_T(j\omega)|^2} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T} \end{aligned}$$

$$R(\tau) \leftrightarrow P(\omega)$$

结论： 功率信号的功率谱与自相关函数是一对傅里叶变换，称为维纳-辛钦（Wiener-Khintchine）定理。

3.5 周期信号的傅里叶变换

一般周期信号的傅里叶变换

周期信号傅里叶系数与傅里叶变换的关系

求解周期信号傅里叶变换的方法

■ 一般周期信号的傅里叶变换

周期为 T 的周期信号可以展开为指数形式的傅里叶级数

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \mathcal{F}[f_T(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right]$$

F_n 与 t 无关, 因此: $\mathcal{F}[f_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\Omega t}]$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega), \quad e^{jn\Omega t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\Omega)$$

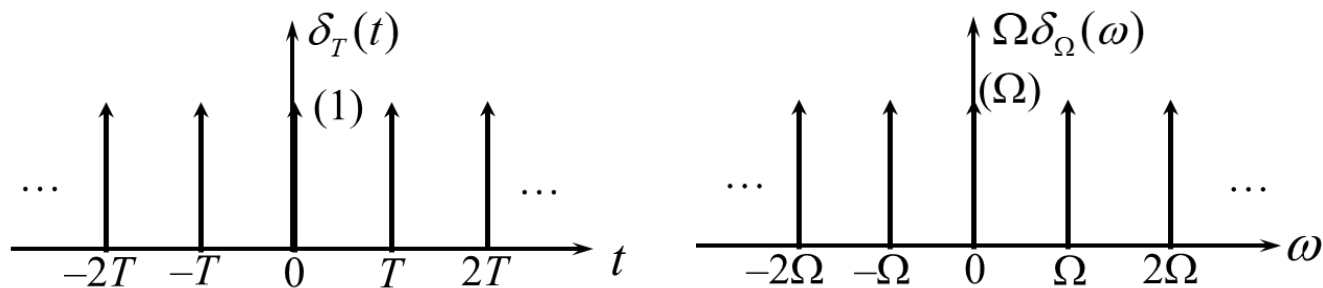
一般周期信号的傅里叶变换:

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

周期信号的频谱密度由冲激序列组成

- **冲激位置:** $\omega = n\Omega$ 谐波频率处
- **冲激强度:** $2\pi F_n$ 由傅里叶系数确定

例题28 求周期冲激序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ 的傅里叶变换。



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-n\Omega) \triangleq \Omega \delta_\Omega(\omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

■ 周期信号傅里叶系数与傅里叶变换的关系

任意周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 可以表示为第一个周期内的脉冲信号 $f_0(t)$ 和周期冲激序列卷积的结果，即：

$$f_T(t) = f_0(t) * \delta_T(t) = \underline{f_0(t)} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$F(j\omega) = \underline{F_0(j\omega)} \cdot \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega)$$

$$\underline{F(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega)} = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega)$$

$$2\pi F_n = \Omega F_0(jn\Omega) \Rightarrow \boxed{F_n = \frac{1}{T} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega}}$$

■ 求解周期信号傅里叶变换的方法

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

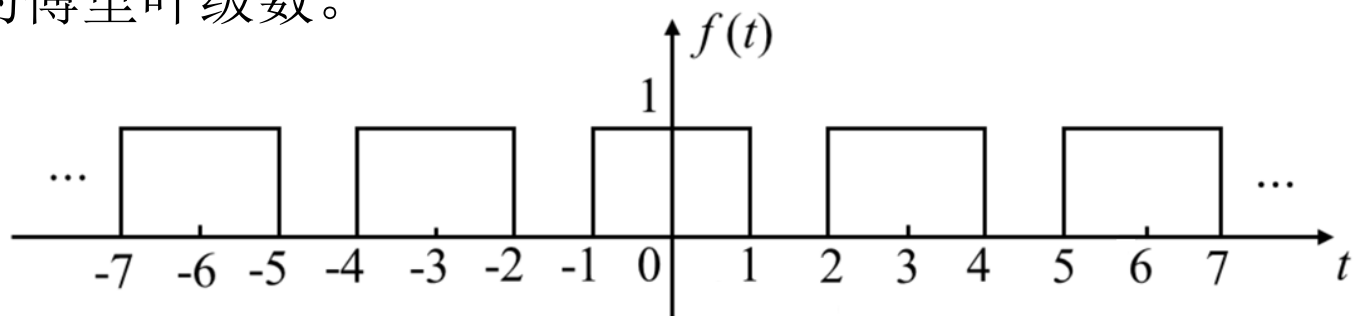
$$F_n = \frac{1}{T} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega}$$

$$\mathcal{F}[f_T(t)] = \Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(jn\Omega) \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

- 找周期信号在第一个周期内的单体 $f_0(t)$;
- 求 $f_0(t)$ 对应的傅里叶变换 $F_0(j\omega)$;
- 周期信号的傅里叶系数为 $F_n = \frac{1}{T} F_0(jn\Omega) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \Big|_{\omega=n\Omega}$;
- 周期信号的傅里叶变换 $\mathcal{F}[f_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$ 。

例题29

已知周期矩形脉冲信号如图所示，试求此信号的傅里叶变换与指数形式的傅里叶级数。



3.6 抽样定理

理想抽样及其信号的频谱

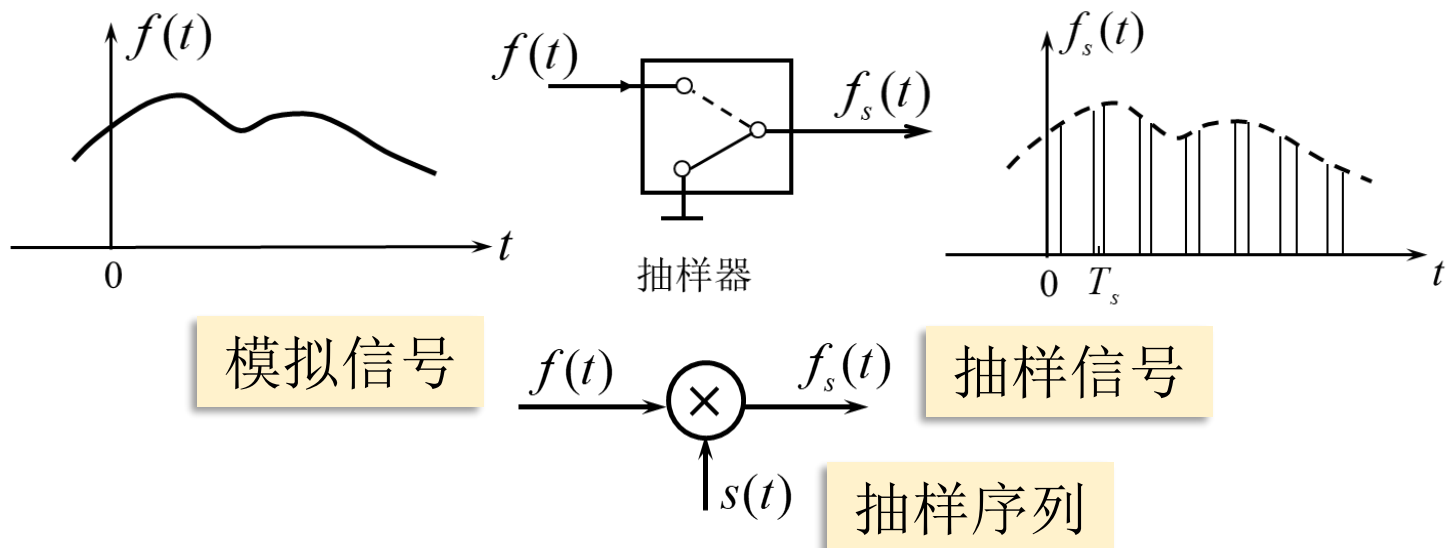
矩形抽样及其信号的频谱

时域抽样定理

时域原信号的恢复

理想抽样及其信号的频谱

抽样的概念

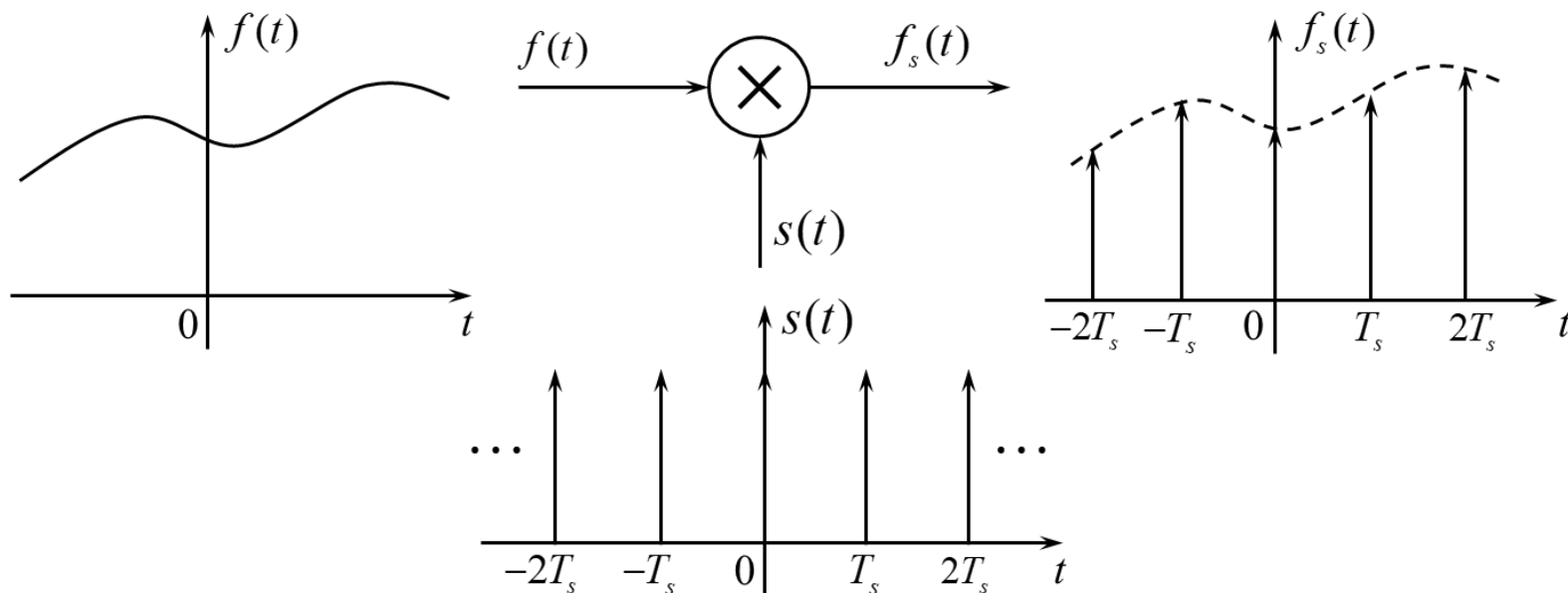


抽样可以将模拟信号转化为一系列时间离散的样值信号。实际中多采用均匀抽样，抽样间隔 T_s 记为抽样周期， $f_s = 1/T_s$ 称为抽样频率。

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$$

理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱



冲激脉冲序列
$$s(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

理想抽样信号
$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

■ 理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow S(j\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s), \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t) \iff F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

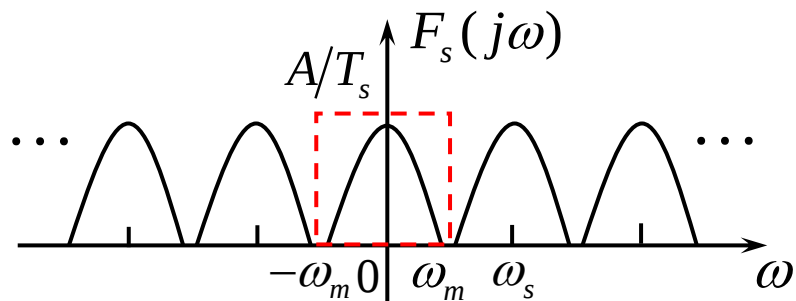
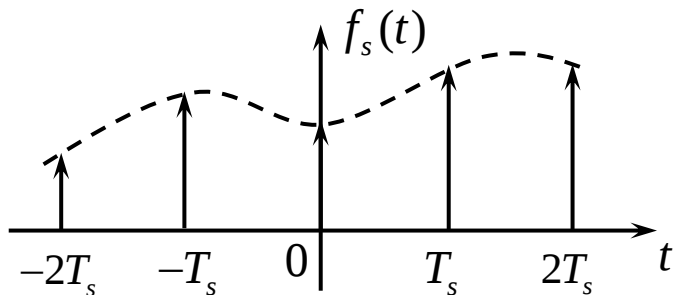
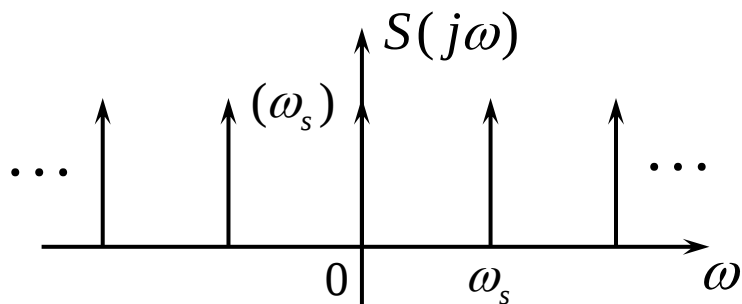
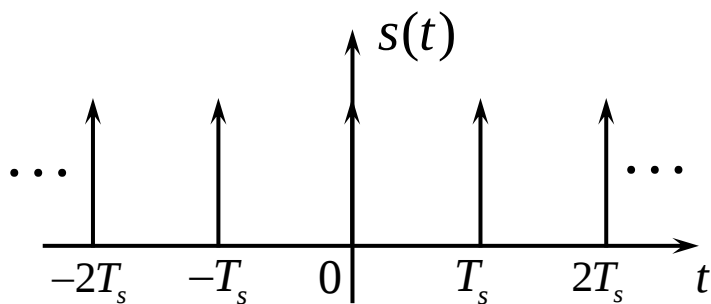
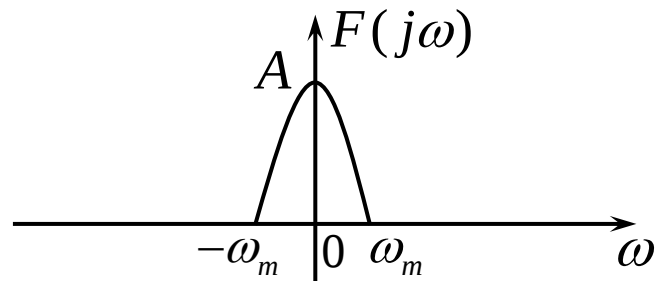
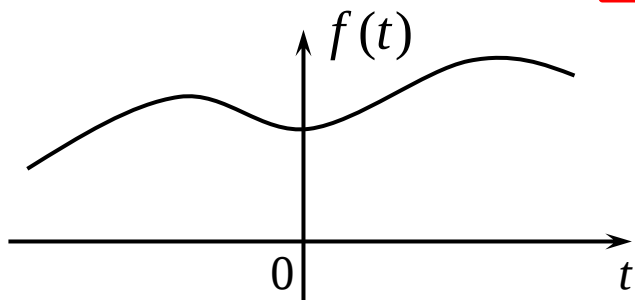
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

- $F_s(j\omega)$ 为信号频谱 $F(j\omega)$ 以 ω_s 为周期延拓
- 频谱幅度变为原先的 $\frac{1}{T_s}$

理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱

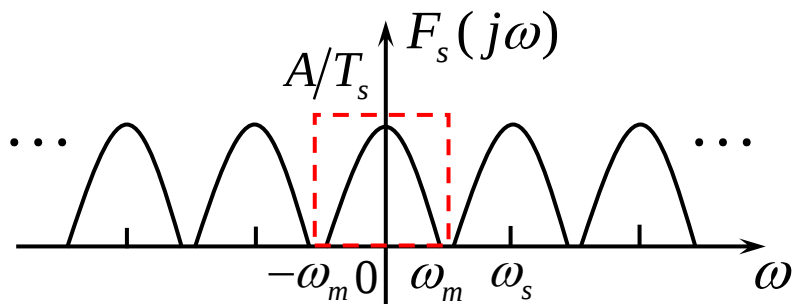
$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$



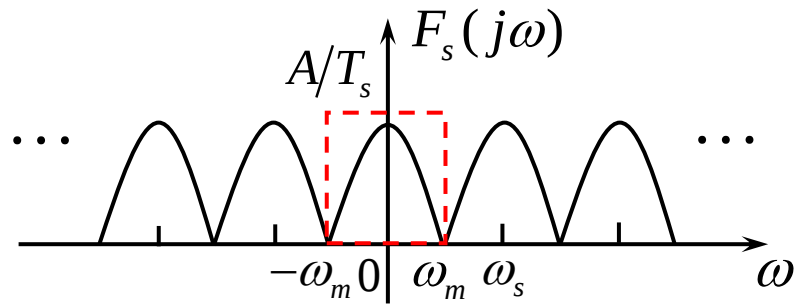
理想抽样及其信号的频谱

理想抽样信号及其频谱

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$



$$f_s > 2 f_m$$



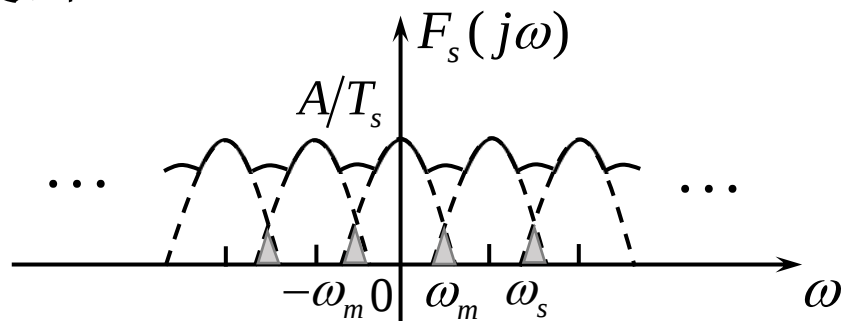
$$f_s = 2 f_m$$

$f_s \geq 2 f_m$ 时，各个频谱之间无混叠，可以分离出原信号的频谱

由抽样序列 $\{f(nT_s)\}$ 可无失真地恢复出 $f(t)$

$f_s < 2 f_m$ 时，频谱之间产生混叠，
无法分离出原信号的频谱。

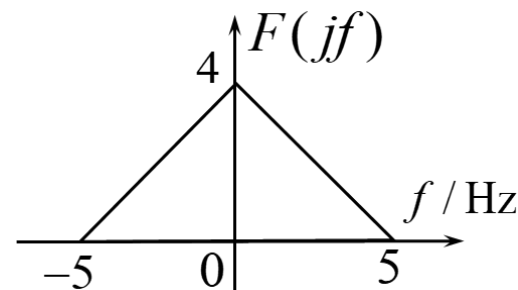
由 $\{f(nT_s)\}$ 不能无失真地恢复 $f(t)$



$$f_s < 2 f_m$$

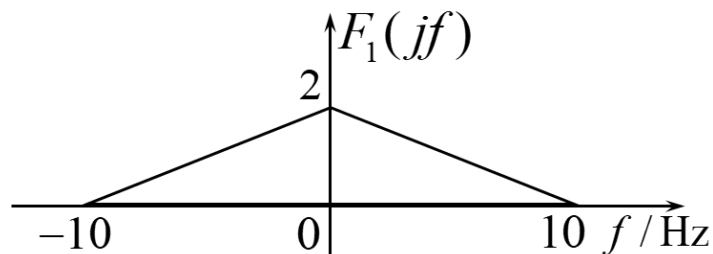
例题30

已知信号的频谱如图所示，其最高频率为5Hz，对 $f(2t)$ 进行理想抽样，分别作出抽样频率为16Hz、20Hz、25Hz时抽样信号的频谱图。



$$f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F\left(j \frac{f}{2}\right)$$

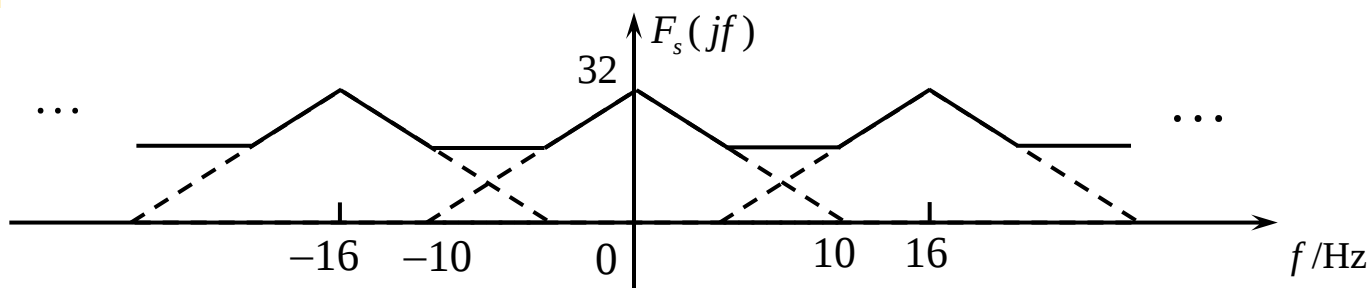
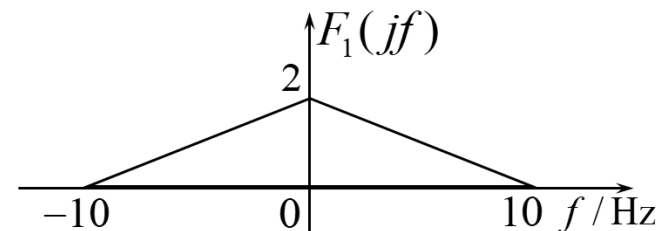
频谱展宽，幅度减半



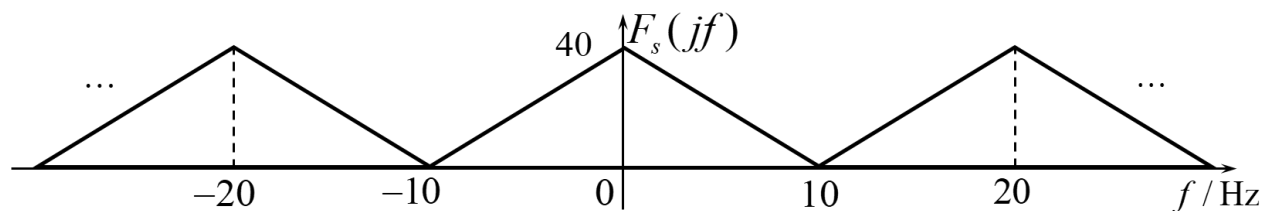
例题30

$$F_s(jf) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[j(f - nf_s)]$$

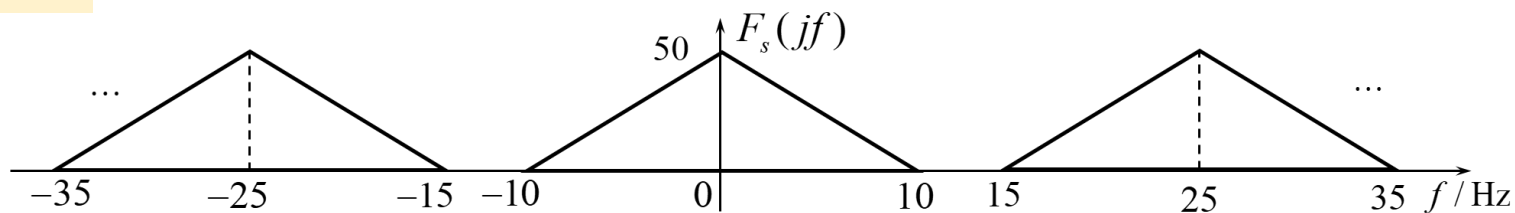
$$f_s = 16\text{Hz}$$



$$f_s = 20\text{Hz}$$



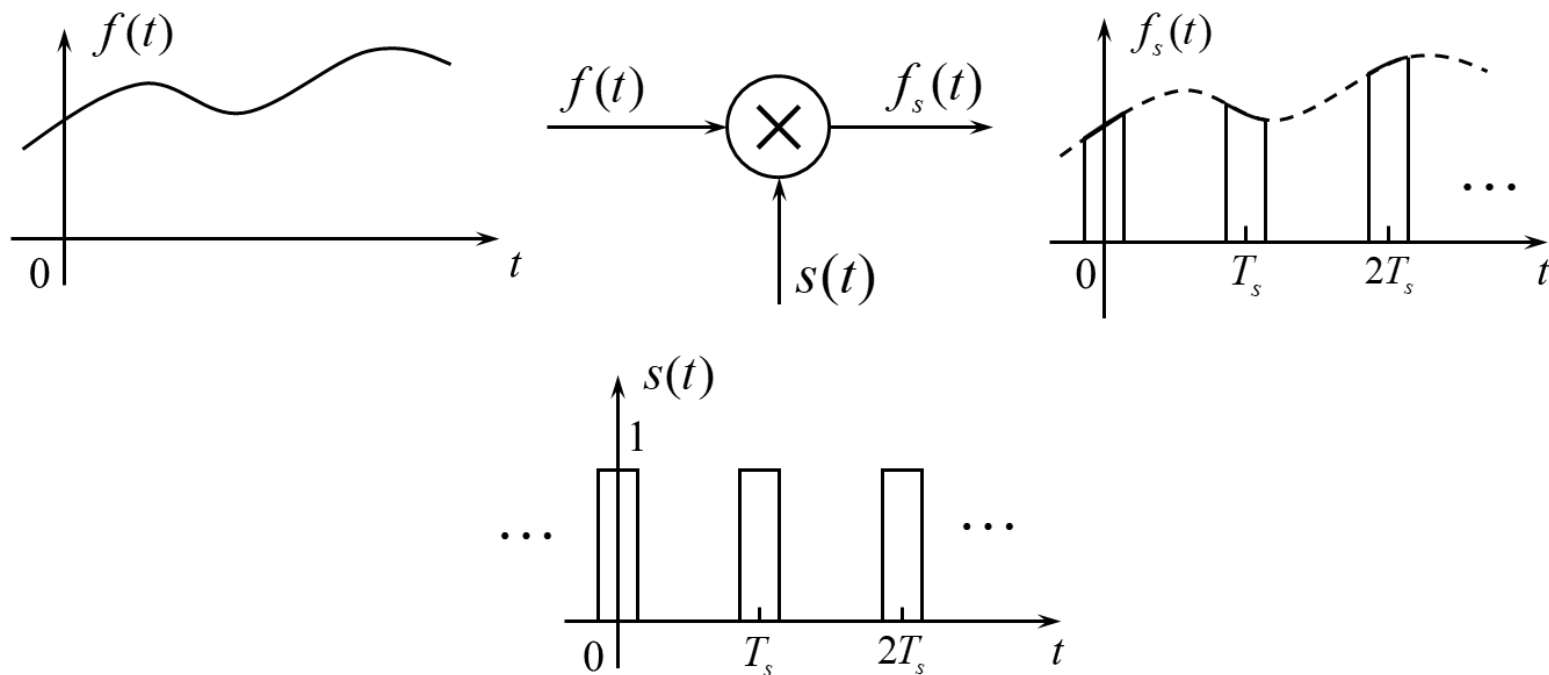
$$f_s = 25\text{Hz}$$



■ 矩形抽样及其信号的频谱

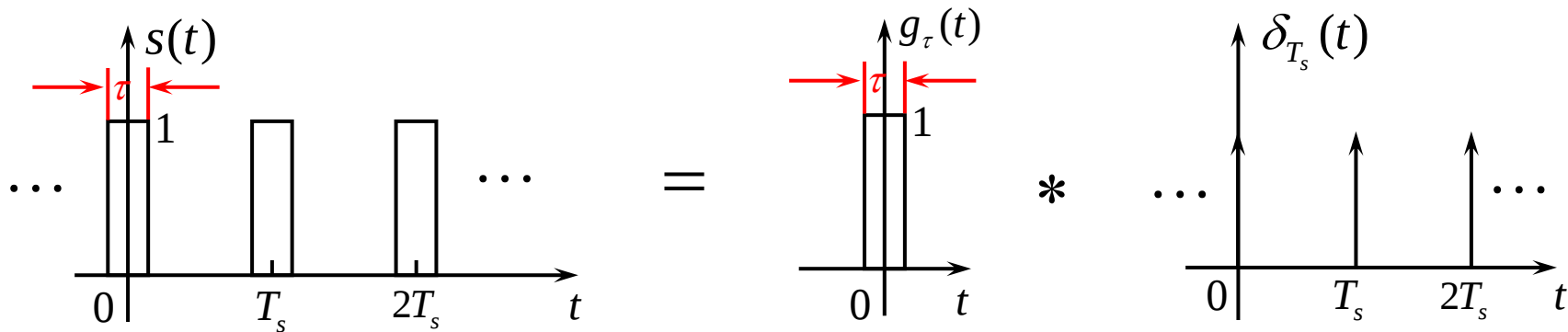
矩形抽样的定义

抽样脉冲为矩形脉冲，此时抽样信号的脉冲顶部随着原信号 $f(t)$ 变化，这样的抽样称为矩形抽样。



■ 矩形抽样及其信号的频谱

矩形抽样信号的频谱 设矩形脉冲脉宽 τ ，周期 T_s



$$s(t) = g_\tau(t) * \delta_{T_s}(t)$$

$$S(j\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{2\pi\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)]$$

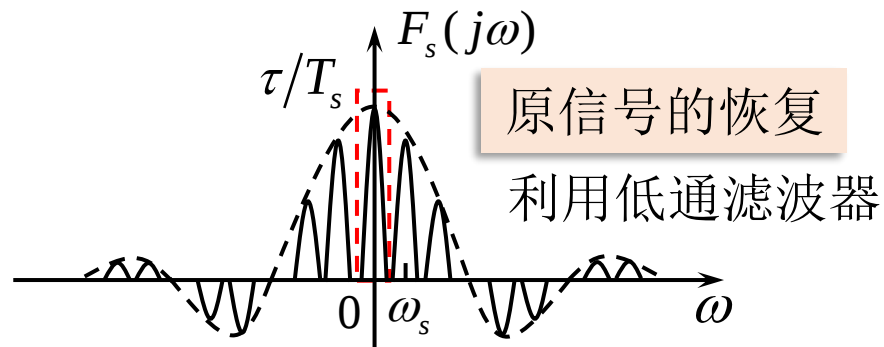
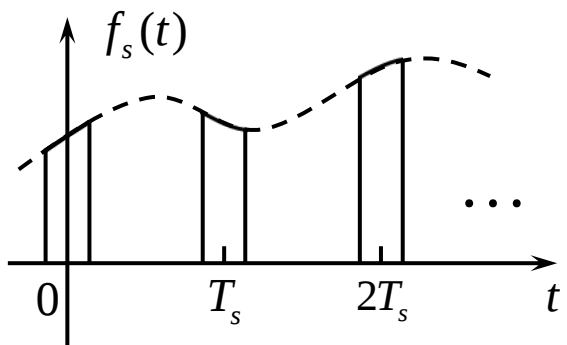
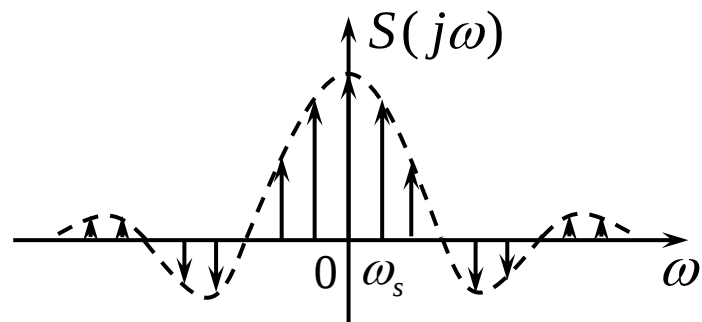
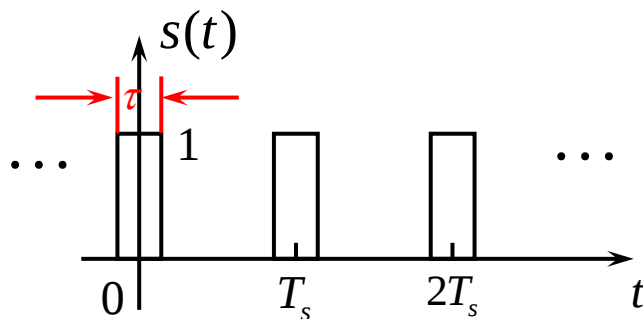
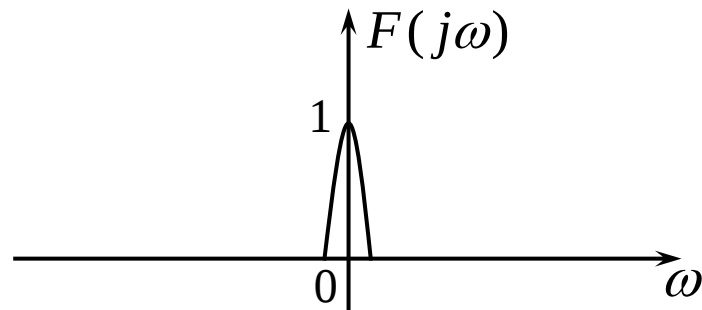
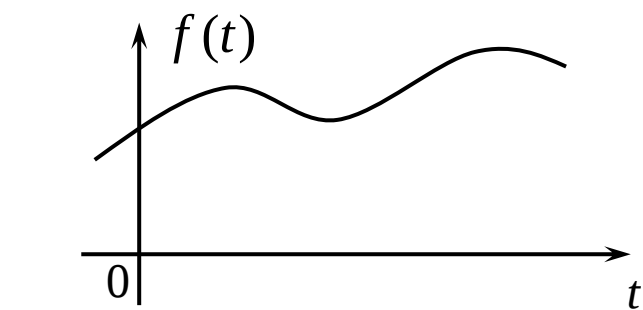
$$F_s(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)]$$

- $F_s(j\omega)$ 被 Sa 函数加权，包络满足 Sa 函数的变化规律

■ 矩形抽样及其信号的频谱

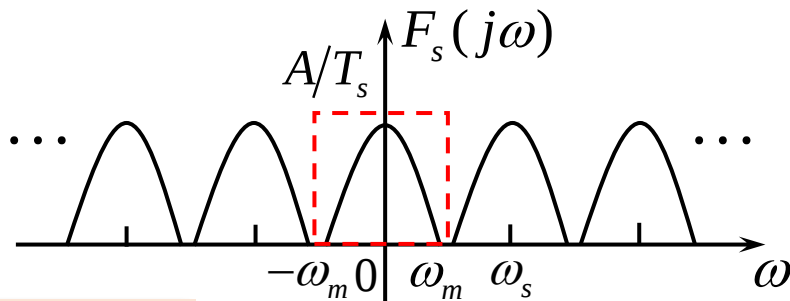
矩形抽样信号的频谱

$$F_s(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\omega_s)]$$

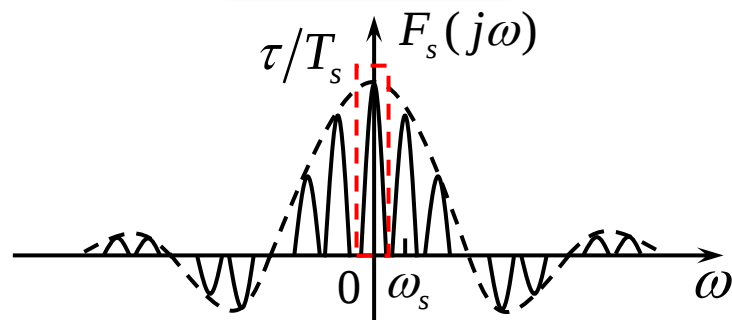


■ 矩形抽样及其信号的频谱

理想抽样



矩形抽样



相同点

- 均为无穷多个间隔为 ω_s 的 $F(j\omega)$ 叠加而成
- 抽样频率满足要求时，均可以通过低通滤波器恢复原信号

不同点

- 理想抽样信号频谱被常数加权，带宽无穷大
- 矩形抽样信号频谱被Sa函数加权，最终收敛于0，第一过零点带宽为

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \text{ (rad/s)} \text{ 或 } B_f = \frac{1}{\tau} \text{ (Hz)}$$

提高传输速度 $\longleftrightarrow$ 压缩传输带宽

矛盾

■ 时域抽样定理

$f_s \geq 2f_m$ 时，各个频谱之间无混叠，可以分离出原信号的频谱

$f_s < 2f_m$ 时，频谱之间产生混叠，无法分离出原信号的频谱

时域抽样定理内容

一个频带限制在 $(0, f_m)$ 内的低通信号 $f(t)$ ，如果以 $f_s \geq 2f_m$ 的速率进行均匀抽样，则由抽样序列 $\{f(nT_s)\}$ 可无失真地恢复出 $f(t)$ 。

奈奎斯特抽样速率

$$f_s = 2f_m$$

最小抽样速率

奈奎斯特抽样间隔

$$T_s = \frac{1}{2f_m}$$

最大抽样间隔

在工程中，若信号不是频带有限信号，则往往通过截止频率为 f_m 的低通滤波器让其频带有限，称为抗混叠滤波。

例题31

若信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的最高角频率分别为 $3\pi \times 10^5 \text{ rad/s}$ 和 $2\pi \times 10^5 \text{ rad/s}$,
试求对下列信号进行时域抽样时的奈奎斯特抽样频率。

- 1) $f_1(\frac{1}{2}t)$ 2) $f_2^3(t)$ 3) $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 4) $f_1(t) * f_2(2t)$ 5) $f_1(t) + f_2(2t)$

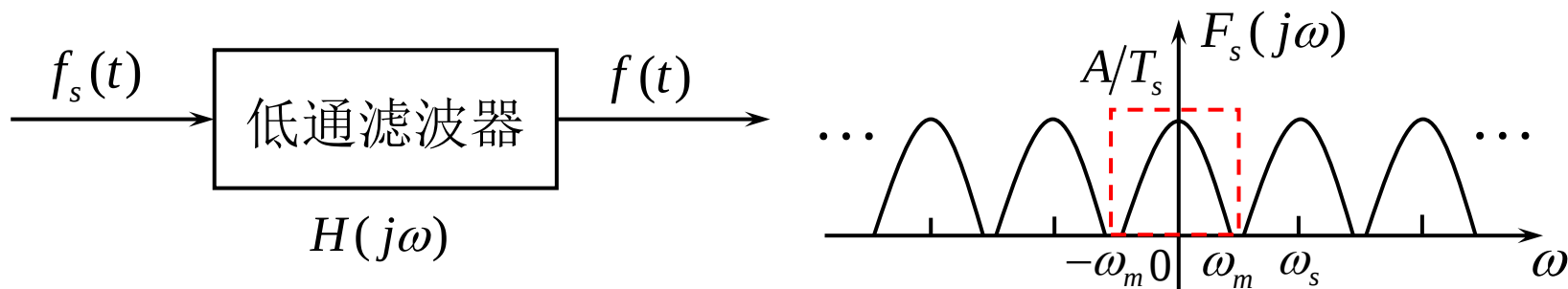
■ 时域抽样定理

小结 $f_1(t)$ 的最高角频率为 ω_{m1} ， $f_2(t)$ 的最高角频率为 ω_{m2}

信号表达式	频谱	最高角频率 ω_m	奈奎斯特角频率 $\omega_s = 2\omega_m$
$f_1(\alpha t) \quad \alpha \neq 0$	$\frac{1}{ \alpha } F_1(j\omega/\alpha)$	$ \alpha \omega_{m1}$	$2 \alpha \omega_{m1}$
$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(j\omega) + F_2(j\omega)$	$\max\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$	$2 \max\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$	$\min\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$	$2 \min\{\omega_{m1}, \omega_{m2}\}$
$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$	$\omega_{m1} + \omega_{m2}$	$2(\omega_{m1} + \omega_{m2})$
$f_1^2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_1(j\omega)$	$2\omega_{m1}$	$4\omega_{m1}$

■ 时域原信号的恢复

利用低通滤波器恢复原信号。



低通滤波器的特性

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = T_s g_{2\omega_c}(\omega)$$

截止频率需满足： $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ ($f_m \leq f_c \leq f_s - f_m$)

例题32

带限信号 $f(t)$ 的最高频率为 300Hz，若对 $y(t) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{t}{3}\right) * f(2t) \right] \cdot f(t)$ 进行时域抽样，为了使这一抽样信号通过一低通滤波器后能完全恢复原信号，则抽样频率应满足 _____；若对 $y(t)$ 以 $T_s = 1\text{ms}$ 进行抽样，低通滤波器的截止频率 f_c 应满足 _____。

最高频率分析 $y(t) = \frac{1}{2} \left[\underline{f\left(\frac{t}{3}\right)} * \underline{f(2t)} \right] \cdot f(t)$

频域压缩至1/3 → 100Hz

频域展宽1倍 → 600Hz

频域相乘，取小 → 100Hz

300Hz

频域卷积，相加 → $f_m = 400\text{Hz}$

$$f_s \geq 2f_m$$

$$f_m \leq f_c \leq f_s - f_m$$

■ 时域原信号的恢复

原信号的恢复：内插公式

假设 $f_s = 2f_m$, $\omega_c = \omega_m$

$$F(j\omega) = F_s(j\omega) \cdot H(j\omega) \iff f(t) = f_s(t) * h(t)$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases} = T_s g_{2\omega_m}(\omega) \quad \leftrightarrow \quad h(t) = T_s \frac{\sin \omega_m t}{\pi t} = Sa(\omega_m t)$$

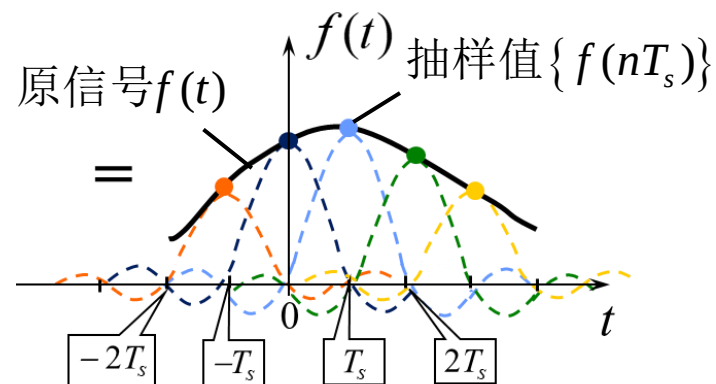
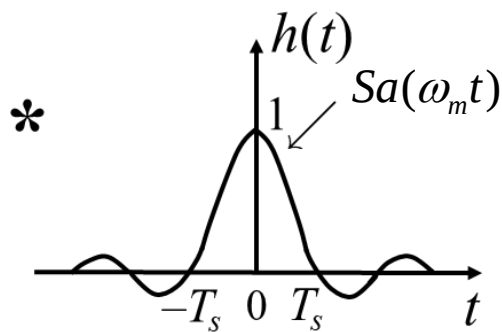
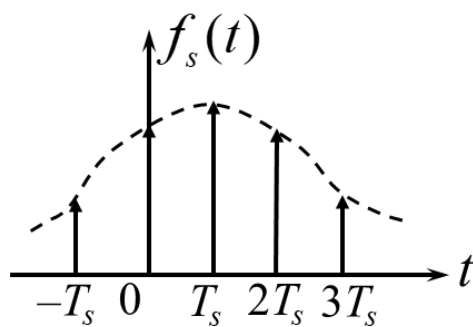
$$\begin{aligned} f(t) &= f_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) * Sa(\omega_m t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) Sa[\omega_m(t - nT_s)] \end{aligned}$$

■ 时域原信号的恢复

原信号的恢复：内插公式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \underbrace{Sa[\omega_m(t - nT_s)]}_{\text{内插函数}}$$

在恢复原信号时，抽样时刻 $t = nT_s$ 的值由抽样值 $f(nT_s)$ 确定，而抽样时刻之外的信号值则是无穷项内插函数的加权和。



3.7 连续时间系统的频域分析

连续时间系统的频域分析

系统无失真传输条件

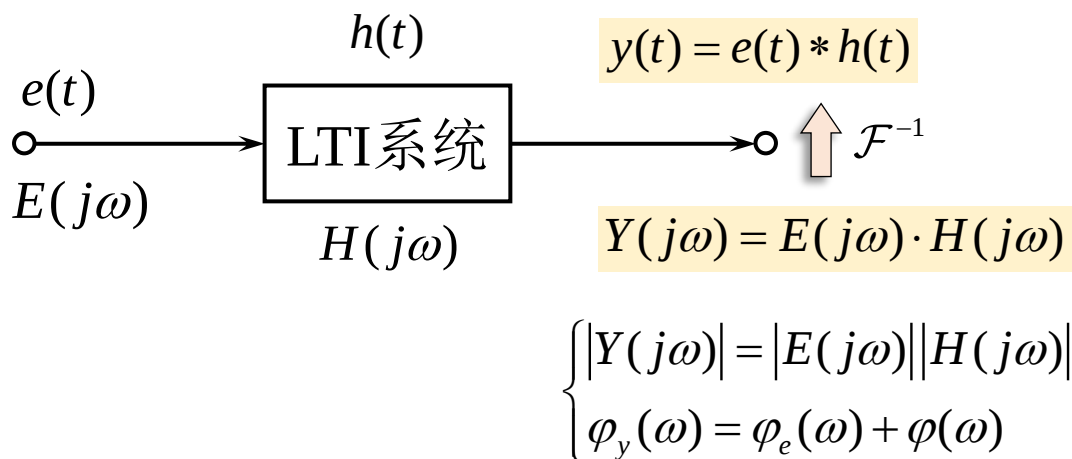
理想低通滤波器的特性

物理可实现系统对系统函数的要求

■ 连续时间系统的频域分析

连续时间系统的频率响应函数

将零状态响应 $y_{zs}(t)$ 简记为 $y(t)$

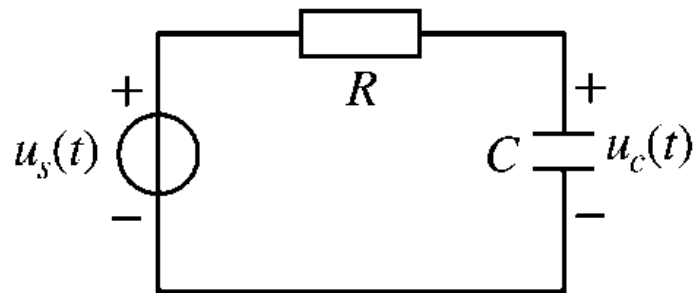


➤ 频率响应函数 $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \begin{cases} \text{幅频特性} & |H(j\omega)| \sim \omega \text{ 的偶函数} \\ \text{相频特性} & \varphi(\omega) \sim \omega \text{ 的奇函数} \end{cases}$$

例题33

线性系统的输入信号 $u_s(t) = \varepsilon(t)$ ，电路如图所示， $R = 1\Omega$ ， $C = 1\text{F}$ ，已知输入信号加入前电容尚无储能，求电容电压 $u_c(t)$ 与电路的单位冲激响应 $h(t)$ 。

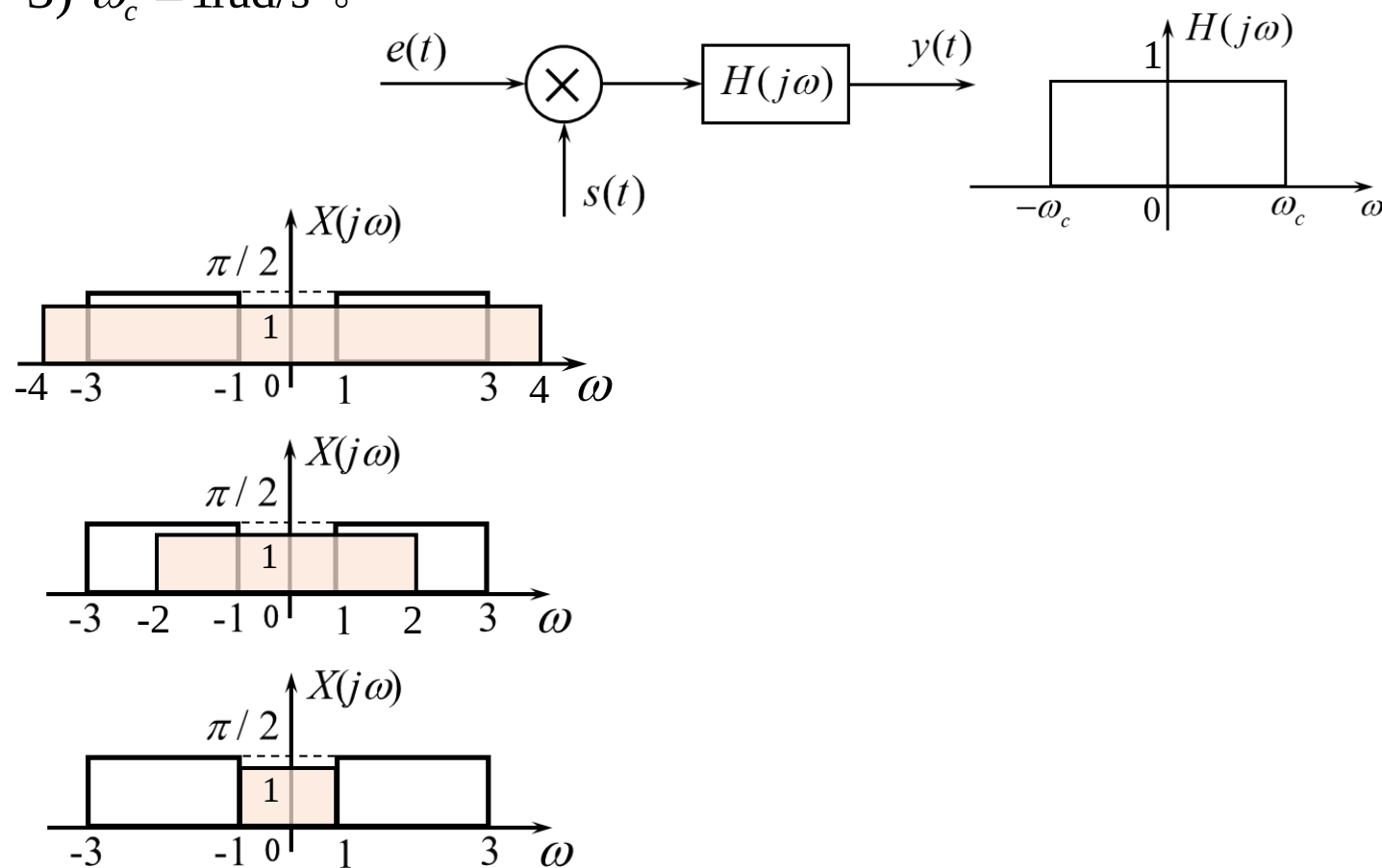


例题34

某连续系统的微分方程为 $y'(t) + 2y(t) = e(t)$, $e(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$, $y(0_-) = 0$
试求该系统的系统函数 $H(j\omega)$ 、冲激响应 $h(t)$ 与系统响应 $y(t)$ 。

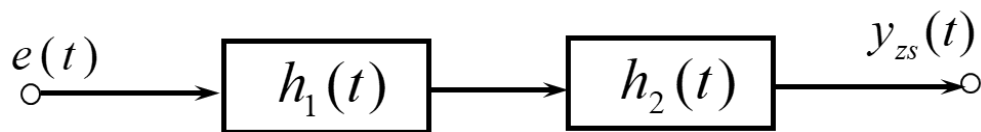
例题35

如图所示系统，已知输入信号 $e(t) = Sa(t)$ ， $s(t) = \cos 2t$ ，系统函数为 $H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)$ 。求三种情况下的 $y(t)$ ：1) $\omega_c = 4\text{rad/s}$ ；2) $\omega_c = 2\text{rad/s}$ ；3) $\omega_c = 1\text{rad/s}$ 。



例题36

如图所示系统，子系统分别满足 $h_1(t) = [Sa(\pi t)]^2$ ， $H_2(j\omega) = e^{-j\omega}$ ，激励信号为 $e(t) = \delta_T(t)$ ，其周期为 $T = 2$ ，求系统的零状态响应 $y(t)$ 。

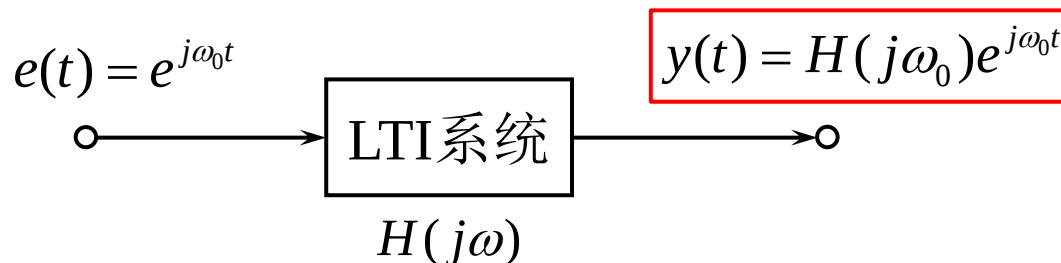


■ 连续时间系统的频域分析

系统对信号的响应

➤ 系统对虚指数信号的响应

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} & \text{基本信号 } e^{jn\Omega t} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{基本信号 } e^{j\omega t} \end{cases}$$



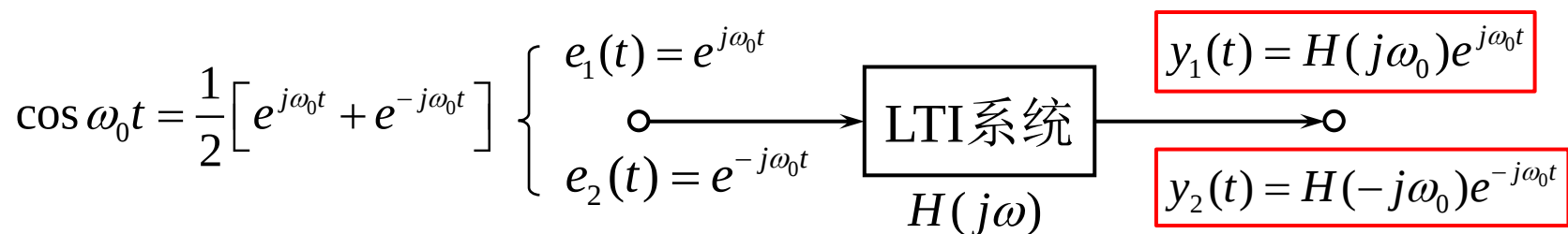
证明: $y(t) = e^{j\omega_0 t} * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$

$$y(t) = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} = \underline{|H(j\omega_0)|} e^{j[\omega_0 t + \underline{\varphi(\omega_0)}]}$$

附加幅度 附加相位

■ 连续时间系统的频域分析

➤ 系统对正弦信号的响应 $e(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$



$$y(t) = \frac{1}{2} [y_1(t) + y_2(t)] = \frac{1}{2} [H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}]$$

“模偶相奇”

$$= \frac{1}{2} [|H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}e^{j\omega_0 t} + |H(-j\omega_0)|e^{j\varphi(-\omega_0)}e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\begin{cases} |H(-j\omega_0)| = |H(j\omega_0)| \\ \varphi(-\omega_0) = -\varphi(\omega_0) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| [e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}] = |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

$$y(t) = \underline{|H(j\omega_0)|} \cos[\omega_0 t + \underline{\varphi(\omega_0)}]$$

附加幅度

附加相位

有时亦称正弦稳态响应

■ 连续时间系统的频域分析

系统对信号的响应

➤ 说明

$$e^{j\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} = |H(j\omega_0)|e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}$$

$$\cos \omega_0 t \Rightarrow y(t) = |H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

激励信号为虚指数/正弦信号时，系统响应仍然为同频率的虚指数/正弦信号，其幅度和相位由系统频率响应函数 $H(j\omega)$ 在 $\omega = \omega_0$ 处的幅度 $|H(j\omega_0)|$ 和相位 $\varphi(\omega_0)$ 确定，并附加在原虚指数/正弦信号上。

➤ 对频率响应函数的理解

系统的频率响应函数 $H(j\omega)$ 对输入信号的不同频率分量有着不同的幅度增益和附加相位，它最终反映了响应的幅度和相位。

例题37

已知某LTI系统的频率响应函数 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ ，试求在如下输入信号的情况下系统的响应 $y(t)$ ：

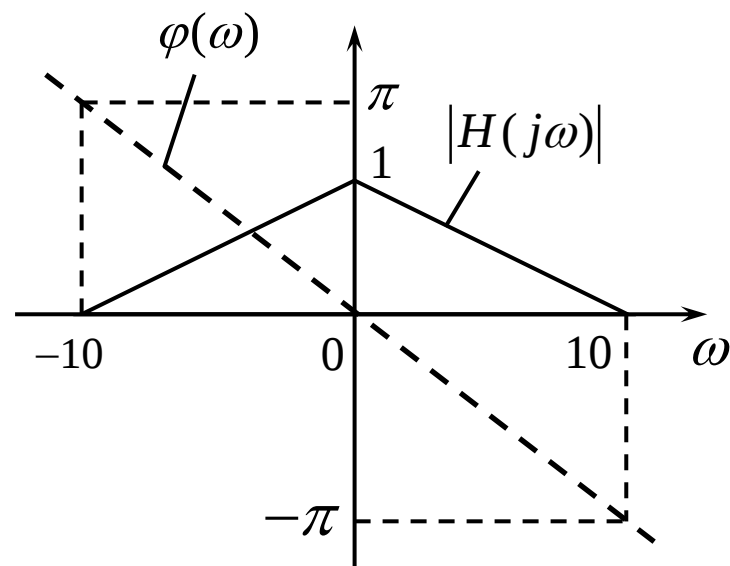
1) $e(t) = \sin t$ 2) $e(t) = \cos 3t$

例题38

某LTI系统的幅频特性和相频特性
如图所示，若系统的激励为

$$e(t) = 2 + 4\cos 5t + 4\cos 10t$$

求系统响应 $y(t)$ 。



■ 连续时间系统的频域分析

➤ 系统对周期信号的响应

变为对离散频率 $n\Omega$ 分析

指数级数：

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{F_n H(jn\Omega)} e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{Y_n} e^{jn\Omega t} \quad \boxed{Y_n = F_n H(jn\Omega)}$$

三角级数：

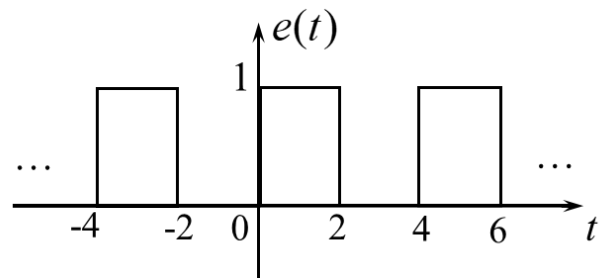
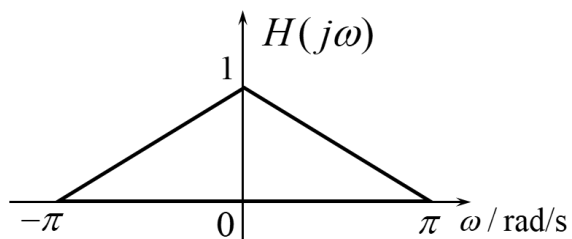
$$e(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \Rightarrow y(t) = \frac{A_0}{2} \underline{H(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A_n |H(jn\Omega)|} \cos[n\Omega t + \underline{\varphi_n + \varphi(n\Omega)}]$$

直流增益 幅度相乘 相位相加

激励信号为周期信号时，系统的响应仍然为相同周期的信号，响应各离散分量的幅度和相位由系统频率响应函数 $H(j\omega)$ 在 $\omega = n\Omega$ 处的幅度 $|H(jn\Omega)|$ 和相位 $\varphi(n\Omega)$ 确定，并附加在各信号分量上。

例题39

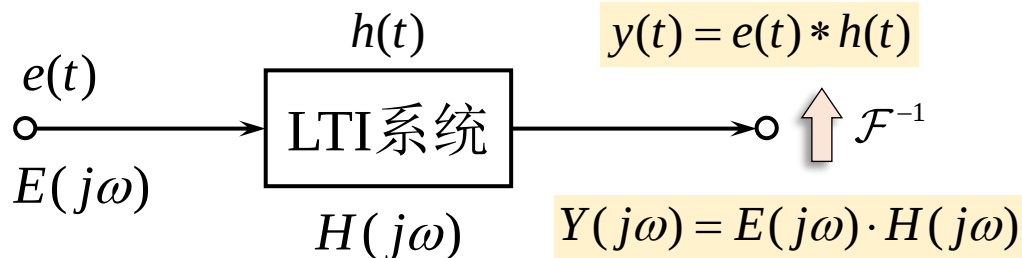
已知某系统的系统函数 $H(j\omega)$ 如图，若以图示周期信号 $e(t)$ 为激励，试求系统的零状态响应 $y(t)$ 。



■ 连续时间系统的频域分析

系统对信号的响应

➤ 系统对任意信号的响应



$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{2\pi} E(j\omega) d\omega \cdot e^{j\omega t} \longrightarrow \frac{1}{2\pi} E(j\omega) d\omega \cdot H(j\omega) e^{j\omega t}$$

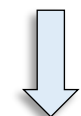
齐次性

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

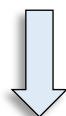
可加性

虚指数信号的线性组合

虚指数信号响应的线性组合



$e(t)$



$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[E(j\omega)H(j\omega)]$$

理解傅里叶变换
的信号分解思想

■ 系统无失真传输条件

系统失真及产生原因

若信号经过系统以后，输出信号与输入信号的波形相比产生了畸变，则称信号产生了失真。失真分为两类：**线性失真**与**非线性失真**。

线性失真

信号通过线性系统所产生的失真，特点是信号经过系统后**不产生新的频率分量**，只包含**幅度失真**和**相位失真**。

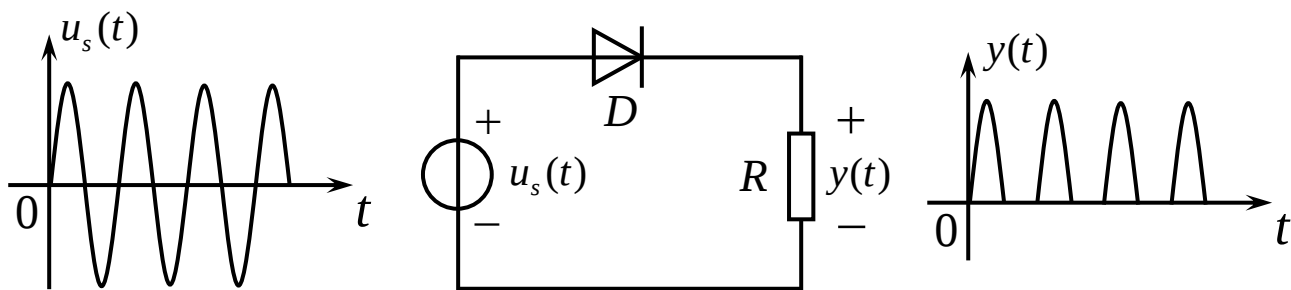
这是由于系统的频率特性不是线性，导致信号各频率分量的时间延迟和幅度增减不一致。

- **幅度失真**：信号各频率分量在**幅度上的增减**不一致。
- **相位失真**：信号各频率分量在**时间上的延迟**不一致。

■ 系统无失真传输条件

非线性失真

信号通过非线性系统所产生的失真，特点是信号经过系统后**产生新的频率分量**。



例：单频正弦波通过二极管，负半周波形被抑制，根据傅里叶级数的知识，输出信号会产生无穷多个谐波分量，即新的频率分量。

■ 系统无失真传输条件

无失真的概念

如果一个信号在经过系统之后，只引起输出信号在**时间上的延迟**和**幅度的增减**，而波形的形状没有发生变化，则称信号无失真。此时系统输入-输出关系满足表达式：

$$y(t) = Ke(t - t_d)$$

此时信号所有频率分量的延时和幅度的增减完全一致，如下图。



■ 系统无失真传输条件

系统无失真传输条件

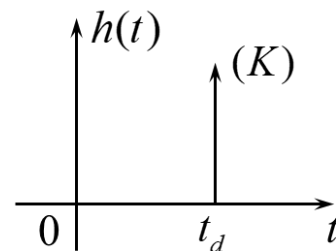
$$y(t) = Ke(t - t_d) = e(t) * K\delta(t - t_d) \quad Y(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_d}$$

单位冲激响应

$h(t) = K\delta(t - t_d)$ 时域条件

频率响应函数

$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$ 频域条件



幅频响应

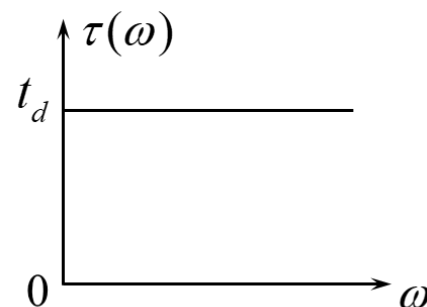
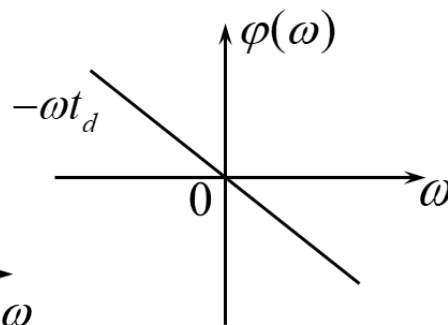
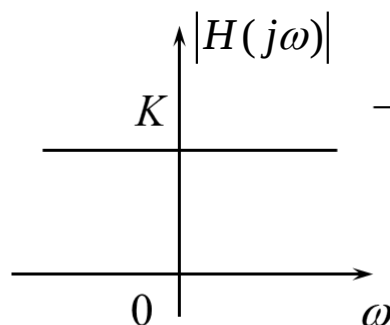
$$|H(j\omega)| = K$$

相频响应

$$\varphi(\omega) = -\omega t_d$$

群延时响应

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = t_d$$

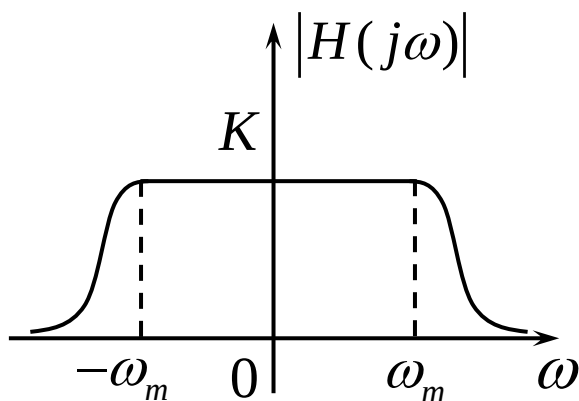


信号不同频率分量
幅度变化增益相同
系统无幅度失真

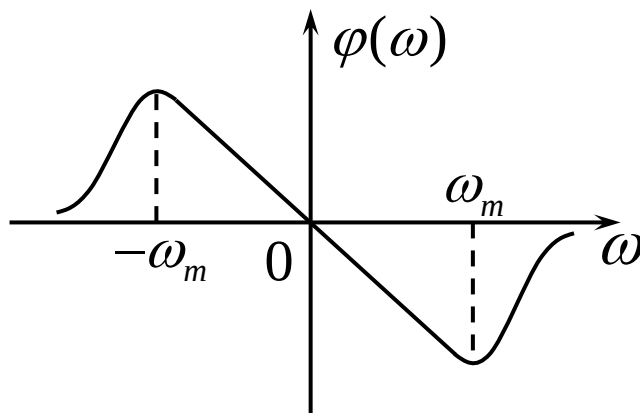
信号不同频率分量到达
输出端的时间先后一致
系统无相位失真

■ 系统无失真传输条件

在实际中理想的无失真传输系统不能实现，因为其频带无限宽。若在系统中传输频带有限的信号。在设计系统时，让系统在输入信号的频带范围内满足无失真传输条件即可。



幅频特性



相频特性

例题40

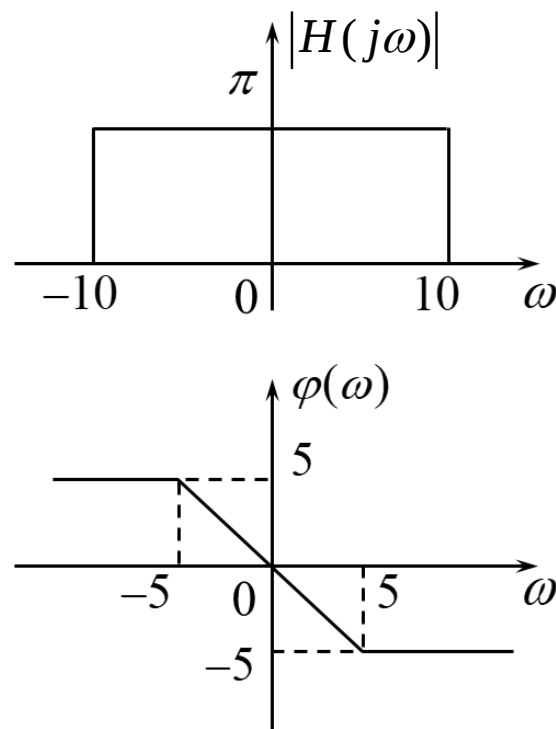
系统的幅频特性和相频特性如图所示，则下列信号通过该系统时，不会产生失真的是：

(A) $f(t) = \cos t + \cos 8t$

(B) $f(t) = \sin 2t + \sin 4t$

(C) $f(t) = \sin 2t \cdot \sin 4t$

(D) $f(t) = \cos^2 4t$

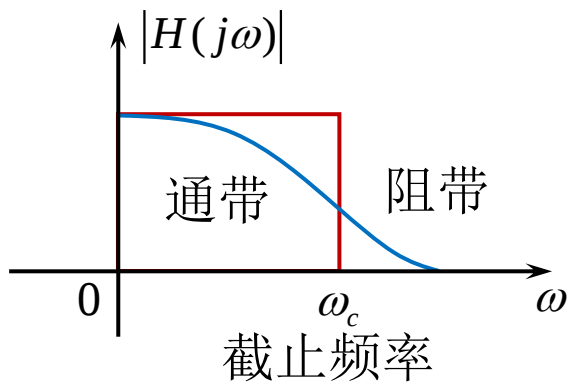


■ 理想低通滤波器的特性

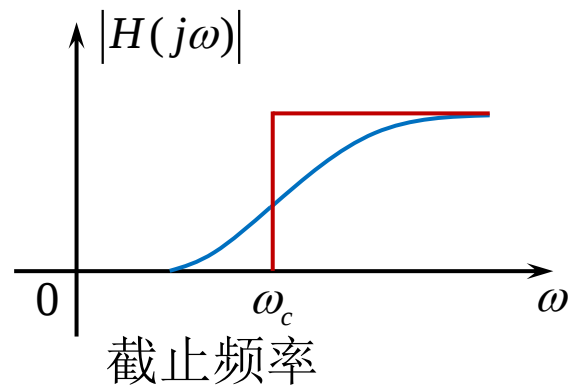
滤波器简述

- 信号在通过一个系统时，某些频率分量能够正常通过，某些频率分量被抑制，称这样的系统为滤波器。
- 按照滤波的效果可分为：低通滤波器（Low-Pass Filter, LPF）、高通滤波器（High-Pass Filter, HPF）、带通滤波器（Band-Pass Filter, BPF）、带阻滤波器（Band-Stop Filter, BSF）。
- 定义滤波器的边界频率为**截止频率**，允许通过的频率范围为滤波器的**通带**，被抑制的频率范围为**阻带**。

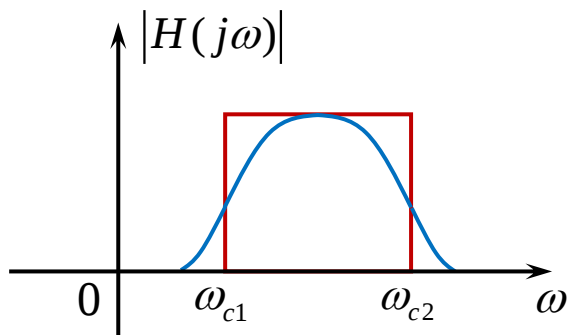
■ 理想低通滤波器的特性



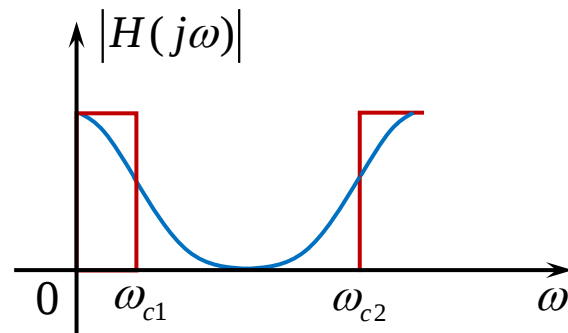
低通滤波器



高通滤波器



带通滤波器



带阻滤波器

理想滤波器的特性在截止频率处陡峭变化，而实际的滤波器在截止频率处并不是陡峭变化，而是具有过渡带和波纹。

■ 理想低通滤波器的特性 **Ideal Low-Pass Filter, ILPF**

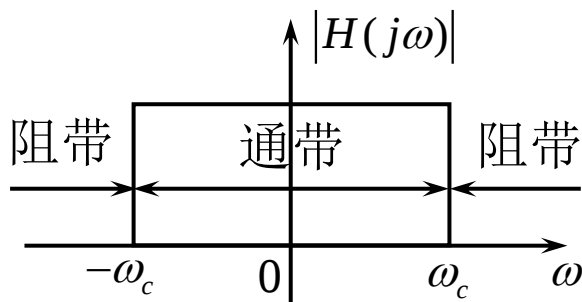
理想低通滤波器的特点

系统允许低于某一频率的所有频率分量无失真的通过，而将高于这一频率的所有频率分量完全阻止。

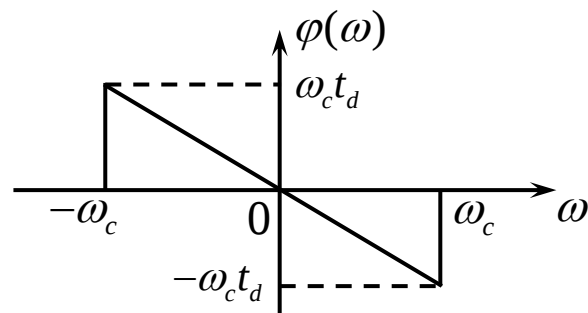
理想低通滤波器的频率特性

$$H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| \leq \omega_c & \text{通带: } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c & \text{阻带: } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

幅频特性 $|H(j\omega)| = g_{2\omega_c}(\omega)$



相频特性 $\varphi(\omega) = -\omega t_d \quad |\omega| \leq \omega_c$

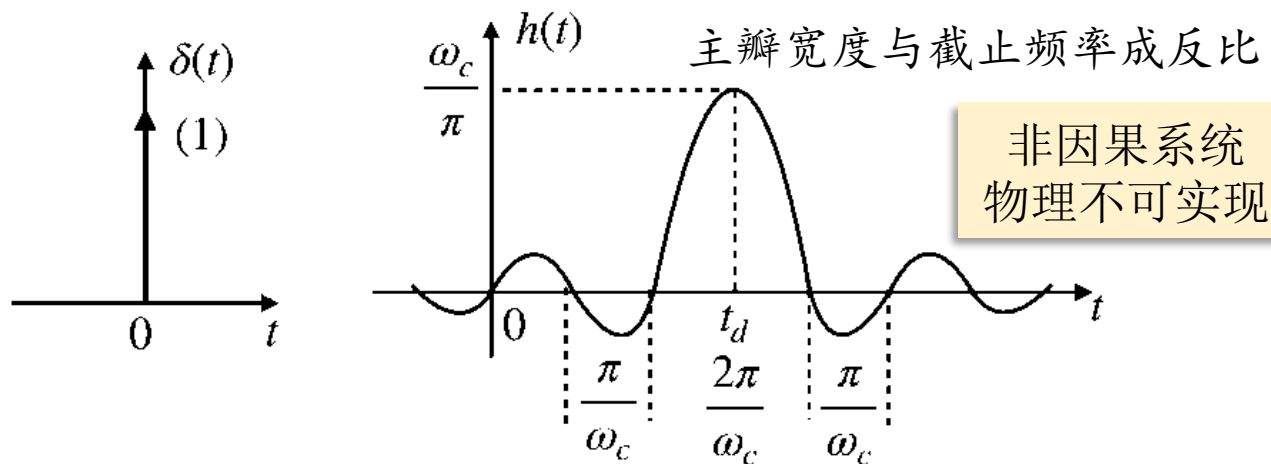


理想低通滤波器在通带内满足无失真传输条件

■ 理想低通滤波器的特性

理想低通滤波器的冲激响应

$$H(j\omega) = g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} \quad \leftrightarrow \quad h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)]$$



- 冲激信号频带无限大，而理想低通滤波器频带有限，频域被截断以后，时域信号将无限延展，产生失真。
- 增大截止频率，滤除的频率分量减少，主瓣宽度减小，失真减少，延时则是相频特性作用的结果。

理想低通滤波器的特性

理想低通滤波器的阶跃响应

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_d)] \Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(\tau-t_d)] d\tau$$

$$x = \omega_c(\tau-t_d) \Rightarrow dx = \omega_c d\tau, \tau \in (-\infty, t) \rightarrow x \in (-\infty, \omega_c(t-t_d))$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}[x] dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \text{Sa}[x] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}[x] dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}[x] dx$$

正弦积分及其性质

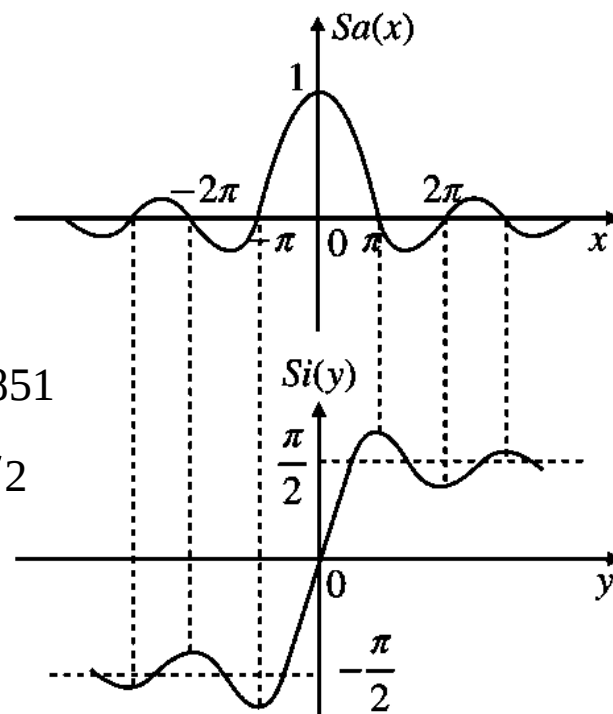
$$\text{Si}(y) = \int_0^y \text{Sa}(x) dx = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$$

1) 奇函数

2) 最大值: $\text{Si}(\pi) \approx 1.851$

3) 稳态值: $\text{Si}(\infty) = \pi/2$

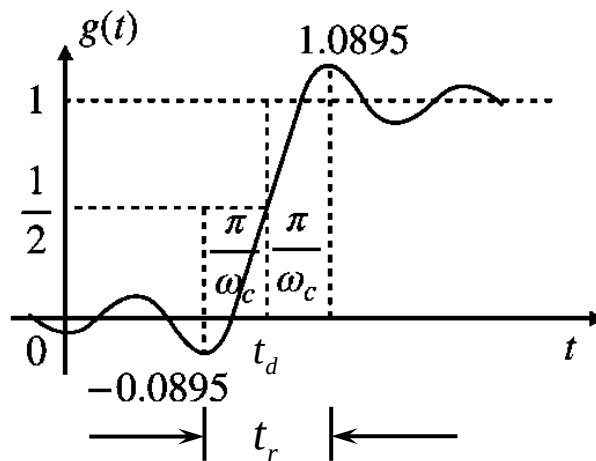
$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_d)]$$



理想低通滤波器的特性

理想低通滤波器的阶跃响应

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_d)]$$



- 与 $\varepsilon(t)$ 相比，理想低通滤波器的阶跃响应波形也产生了失真，缓慢上升，因为滤波器滤去了决定跳变的高频分量，延时是相频作用的结果。
- 上升时间： $t_r = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{B_f}$ 波形上升时间与低通滤波器截止频率成反比。
- 响应的过冲与振荡： $g_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi] \approx 1.0895$ 吉布斯现象

频域截断，时域无限延伸，且有振荡，其过冲值比稳态值高约9%，且该值与截止频率无关。这一由频率截断效应引起的现象即为吉布斯现象。

■ 物理可实现系统对系统函数的要求

物理可实现系统的时域条件

系统冲激响应和阶跃响应因果 $\begin{cases} h(t) = 0 & t < 0 \\ g(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} h(t) = h(t)\varepsilon(t) \\ g(t) = g(t)\varepsilon(t) \end{cases}$

物理可实现系统的频域条件

佩利-维纳（Paley-Wiener）准则：物理可实现系统的幅频特性应满足

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (\text{能量有限})$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |H(j\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (\text{不允许在一个有限频带内有 } |H(j\omega)| = 0)$$

对于物理可实现系统， $|H(j\omega)|$ 在某些孤立点上可以为0。

注：准则只对系统幅频特性作出了要求，而没有对相频特性做出要求；该准则只是物理可实现系统的必要条件，而非充分条件。

理想滤波器物理不可实现，因为它们在某段频率范围内幅频为0。

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

信号与系统

第4章 连续时间信号与系统的复频域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第4章 连续时间信号与系统的复频域分析

4.1 拉普拉斯变换

4.2 单边拉普拉斯变换的性质

4.3 单边拉普拉斯反变换

4.4 连续时间系统的复频域分析

4.5 系统函数与系统特性

4.6 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.1 拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换及其收敛域

单边拉普拉斯变换及其收敛域

常见信号的单边拉普拉斯变换

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

为什么要引入拉普拉斯变换

- 有些信号不满足绝对可积条件，使得其傅里叶变换不好求解；

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- 利用傅里叶变换只能求解系统零状态响应，不能求解零输入响应，从而不能分析系统全响应；
- 有些信号的傅里叶变换比较复杂（如阶跃函数的傅里叶变换）

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

➤ 引入指数衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ，使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \triangleq F(\sigma+j\omega)$$

$$s = \sigma + j\omega \quad F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega$$

$$ds = j d\omega \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

双边拉普拉斯变换的定义

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

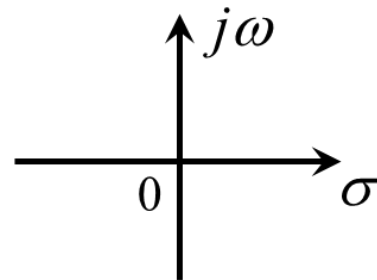
➤ 双边拉普拉斯变换

$$\begin{cases} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt & \text{双边拉普拉斯正变换} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds & \text{双边拉普拉斯反变换} \end{cases} \quad f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$\text{基本信号 } e^{st} = \underline{e^{\sigma t}} \cdot \underline{e^{j\omega t}}$$

影响幅度变化 傅里叶分析的基本信号

傅里叶分析只需考虑基本信号的振荡频率 ω ，可用 $j\omega$ 轴上的点对应；拉普拉斯变换还需要考虑一个影响幅度变化的 σ ，用复平面 $s = \sigma + j\omega$ 上的点来表示，相当于增加一个维度。



s 平面 $s = \sigma + j\omega$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 收敛域：使拉普拉斯变换积分收敛，即 $F(s)$ 存在的 σ 的取值范围。

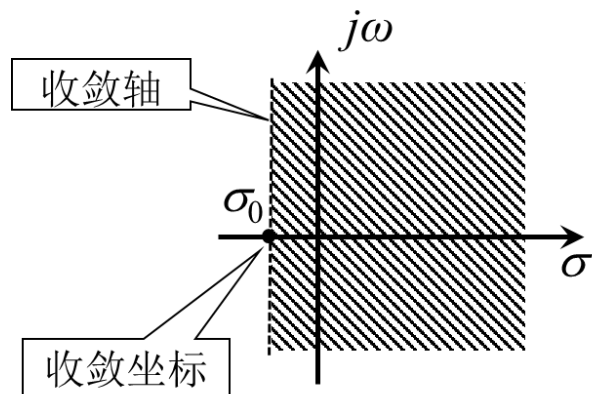
因果信号

$$\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

以 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 为收敛轴的右侧复平面

示例 $f(t) = e^{\alpha t} \varepsilon(t), \alpha \in R$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(s-\alpha)t} \right] \\ &= \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} \right] \end{aligned}$$



$$e^{\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma > \alpha$$

$$\text{Re}[s] = \sigma > \alpha \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = 0 \quad F(s) = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma = \alpha \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-j\omega t} \text{ 为未定值, 拉普拉斯变换不定}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma < \alpha \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \infty \quad \text{此时拉普拉斯变换无界}$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 收敛域：使拉普拉斯变换积分收敛，即 $F(s)$ 存在的 σ 的取值范围。

反因果信号

$$\text{Re}[s] = \sigma < \sigma_0$$

以 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 为收敛轴的左侧复平面

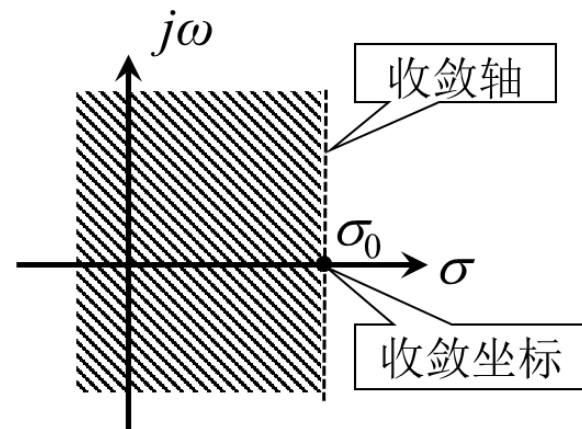
示例 $f(t) = -e^{\alpha t} \varepsilon(-t), \alpha \in R$

$$\begin{aligned} F(s) &= -\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \bigg|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(s-\alpha)t} \right] \\ &= \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma < \alpha \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = 0 \quad F(s) = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma = \alpha \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-j\omega t} \text{ 为未定值, 拉普拉斯变换不定}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma > \alpha \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \infty \quad \text{此时拉普拉斯变换无界}$$



$$-e^{\alpha t} \varepsilon(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma < \alpha$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 收敛域：使拉普拉斯变换积分收敛，即 $F(s)$ 存在的 σ 的取值范围。

$$e^{\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma > \alpha$$

$$-e^{\alpha t} \varepsilon(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma < \alpha$$

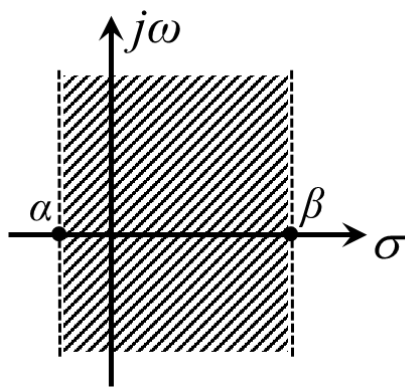
不同信号可能会有相同的象函数，但收敛域不同。

双边信号

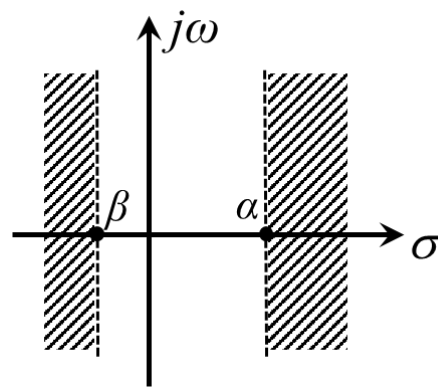
$$f(t) = \underbrace{e^{\alpha t} \varepsilon(t)}_{\text{red}} + \underbrace{e^{\beta t} \varepsilon(-t)}_{\text{blue}} \quad F(s) = \frac{1}{\underbrace{s - \alpha}_{\text{red}}} - \frac{1}{\underbrace{s - \beta}_{\text{blue}}}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma > \alpha$$

$$\text{Re}[s] = \sigma < \beta$$



$\alpha < \beta$ $F(s)$ 存在

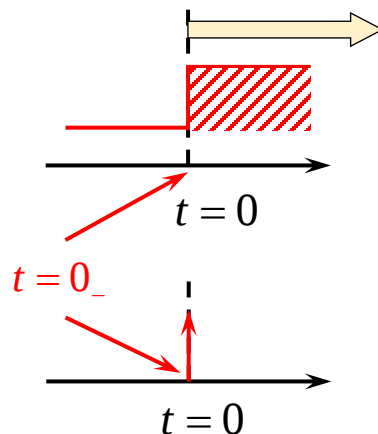


$\alpha \geq \beta$ $F(s)$ 不存在

■ 单边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 单边拉普拉斯变换

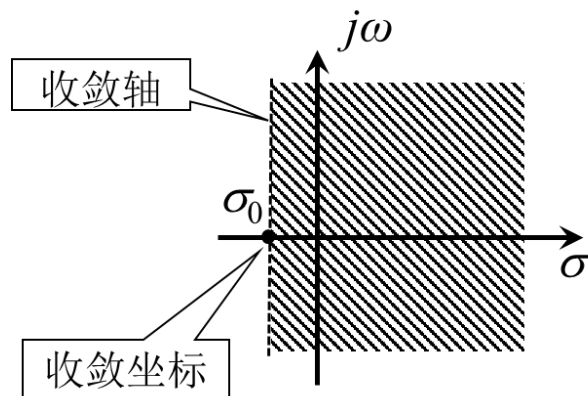
$$\begin{cases} F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt & \text{单边拉普拉斯正变换} \\ f(t) = \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \right] \varepsilon(t) & \text{单边拉普拉斯反变换} \end{cases}$$



取下限 $t=0_-$ 是为了包含到 $t=0$ 时刻，此时可能含有冲激和跳变等。

➤ **收敛域：** 信号 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换等效于因果信号 $f(t)\varepsilon(t)$ 的双边拉普拉斯变换，因此单边拉普拉斯变换的收敛域为：

$\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 收敛轴 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 的右侧复平面



➤ 实际主要研究因果信号，因此主要分析单边拉普拉斯变换，不再特别强调收敛域。

■ 常见信号的单边拉普拉斯变换

$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty \quad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty$		
$e^{s_0 t} \varepsilon(t)$ $e^{s_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{s - s_0} \quad \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0]$	$e^{\pm \alpha t} \varepsilon(t)$ $e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s \mp \alpha} \quad \operatorname{Re}[s] > \pm \alpha$	$e^{\pm j\omega_0 t} \varepsilon(t)$ $e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{s \mp j\omega_0} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$
$\cos \omega_0 t \varepsilon(t)$ $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$		
$\sin \omega_0 t \varepsilon(t)$ $\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$		
$\varepsilon(t) \text{ 或 } 1 \leftrightarrow F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$		
$g_\tau(t - \frac{\tau}{2}) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau) \leftrightarrow F(s) = \int_{0_-}^{\tau} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big _0^{\tau} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty$		

4.2 单边拉普拉斯变换的性质

线性性质

时域微分性质

时移性质

时域积分性质

复频移性质

复频域微分性质

尺度变换性质

复频域积分性质

时域卷积性质

初值定理

复频域卷积性质

终值定理

■ 线性性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_2$$

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s) \quad \operatorname{Re}[s] > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

例题1 求信号 $f(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

收敛域也可能存在一些特殊情况：若两个信号作减法以后变成时域有限信号，此时信号本身就绝对可积，当 σ 取任意值时，拉普拉斯变换都存在，此时收敛域会扩充为整个 s 平面。

如：阶跃函数的收敛域为 $\operatorname{Re}[s] > 0$

$$\text{但是 } g_\tau(t - \frac{\tau}{2}) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty$$

■ 时移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \text{ 则: } f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}, \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

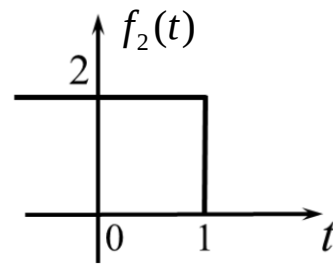
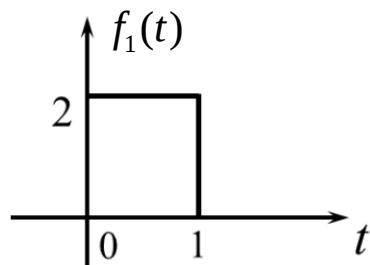
注意： $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$ 是指因果信号 $f(t)\varepsilon(t)$ 延时 t_0 后的信号，即延时前后信号波形形状不变。为保证因果性，只考虑右移，即 $t_0 > 0$ 。

$$\text{若 } f(t) \text{ 是因果信号，则: } f(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}, \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

例题2 求下列信号的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

$$1) f(t) = e^{-2(t-3)}\varepsilon(t-3) \quad 2) f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t-3) \quad 3) f(t) = e^{-2(t-3)}$$

例题3 求图示两个信号的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



■ 时移性质

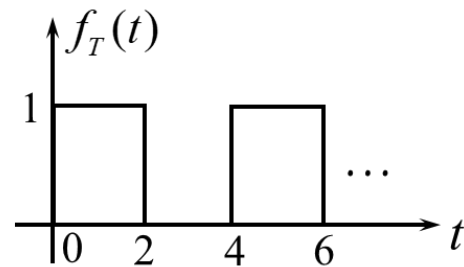
单边周期信号的拉普拉斯变换

$$f_T(t) = f_0(t) + f_0(t-T) + \cdots + f_0(t-nT) + \cdots \quad f_0(t) \leftrightarrow F_0(s), \operatorname{Re}[s] > -\infty$$

$$f_T(t) \leftrightarrow F_0(s)(1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + \cdots) = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}} \quad |e^{-sT}| < 1, \operatorname{Re}[s] > 0$$

已知第一个周期内的脉冲 $f_0(t)$ 及周期 T ，即可求得单边周期信号的拉普拉斯变换。

例题4 求图示单边周期矩形脉冲信号的象函数 $F(s)$ 。



■ 复频移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1$$

$$\text{则: } f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s - s_0), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 + \sigma_0, \sigma_0 = \operatorname{Re}[s_0]$$

例题5 求信号 $f(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \varepsilon(t)$ 、 $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \varepsilon(t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > -\alpha$$

$$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > -\alpha$$

■ 尺度变换性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \quad \text{则:} \quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0, a > 0$$

(要求 $a > 0$ 是为了保证信号的因果性)

时移、复频移、尺度变换经常放在一起考察。

$$\text{例: } f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \quad f(at-b)\varepsilon(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{s}{a}b}, \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0$$

例题6

已知因果信号 $f(t)$ 的象函数 $F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ ，求 $e^{-t} f(3t-2)$ 的象函数。

■ 时域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_2$$

则： $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$ 收敛域是二者收敛域的公共部分

$$\text{LTI系统: } y_{zs}(t) = e(t) * h(t) \leftrightarrow Y_{zs}(s) = E(s) \cdot H(s)$$

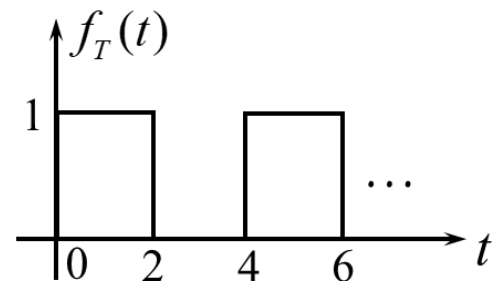
■ 复频域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_2$$

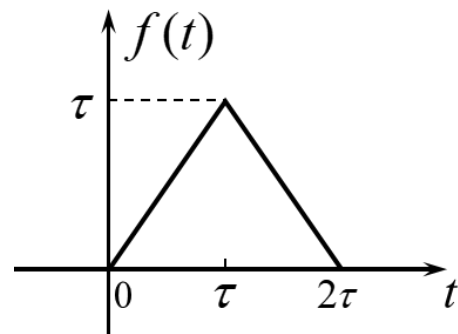
$$\text{则: } f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta) F_2(s-\eta) d\eta \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 + \sigma_2$$

少用，不作要求。

例题7 求图示单边周期矩形脉冲信号的象函数 $F(s)$ 。（例3另解）



例题8 求图示三角脉冲信号的拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



■ 时域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad \text{Re}[s] > \sigma_0 \quad \left. \begin{array}{l} f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \\ f''(t) \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \end{array} \right\} \text{需要记忆}$$

若 $f(t)$ 是因果信号，即 $f(0_-) = f'(0_-) = \cdots = f^{(n)}(0_-) = 0$ ，则 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s)$ 。

该性质引入了系统的初始状态，为系统响应的求解带来了方便。

例题9 求 $f_1(t) = \frac{d}{dt}[\cos 2t \varepsilon(t)]$, $f_2(t) = \frac{d}{dt}[\cos 2t]$ 的单边拉普拉斯变换。

■ 时域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \text{ 则: } \begin{cases} \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}, & (\int_{0_-}^t)^n f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s^n} \\ f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} \end{cases}$$

$f^{(-1)}(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau$: 积分在 $t = 0_-$ 时刻的值。

解题应用: 求导 $\rightarrow$ 单边拉普拉斯变换 $\rightarrow$ 时域积分性质

若 $f_1(t) = f'(t) \leftrightarrow F_1(s)$, 则有:

$$\int_{0_-}^t f_1(x) dx = \int_{0_-}^t \frac{df(x)}{dx} dx = \underline{f(t)} - \underline{f(0_-)}$$

$\Downarrow \quad \Downarrow$ 单边LT

$$\underline{F(s)} - \underline{\frac{f(0_-)}{s}} = \frac{F_1(s)}{s}$$

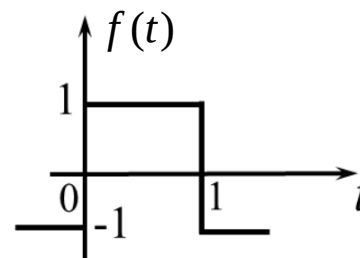
$$f(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{F_1(s)}{s} + \frac{f(0_-)}{s}$$

若因果信号满足 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow F_n(s)$, 则 $f(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{F_n(s)}{s^n}$

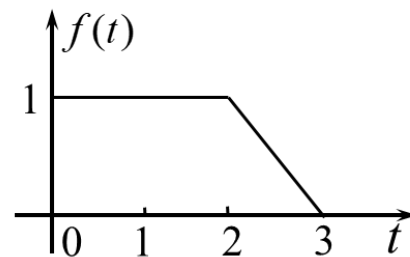
例题10 求解信号 $f(t) = t^n \varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$$

例题11 求解图示信号的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



例题12 已知信号 $f(t)$ 的波形如图所示，求其拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



■ 复频域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

$$\text{则: } \left. \begin{aligned} (-t)f(t) &\leftrightarrow \frac{d}{ds} F(s) \\ (-t)^n f(t) &\leftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} F(s) \end{aligned} \right\} \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \left[\int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right] \\ &= \int_{0_-}^{+\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} F(s) &= \frac{d^n}{ds^n} \left[\int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right] \\ &= \int_{0_-}^{+\infty} (-t)^n f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

例题13 求函数 $f(t) = t^2 e^{-2t} \varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换。

■ 复频域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0, \text{ 则 } \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(\lambda) d\lambda, \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

例题14 求函数 $f(t) = \frac{\sin t}{t} \varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换。

例题15 求函数 $f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{t}$ 的单边拉普拉斯变换。

■ **初值定理** 由 $F(s)$ 直接求 $f(0_+), f'(0_+), f''(0_+), \dots$

设信号不含冲激信号及其各阶导数（ $F(s)$ 是真分式），若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ ：

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$f'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF(s) - f(0_+)]$$

$$f''(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2F(s) - sf(0_+) - f'(0_+)]$$

■ **终值定理** 由 $F(s)$ 判断 $f(\infty)$ 是否存在，并求之。

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0, \sigma_0 < 0 \quad (\text{收敛域包含虚轴})$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

前提： 单边拉氏变换 $F(s)$ 在 s 的右半平面或 $j\omega$ 轴上不存在极点（原点 $s = 0$ 的一阶极点除外，该极点可约去），此时 $f(\infty)$ 有界。

例题16

给定下列象函数，求对应信号 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 和终值 $f(\infty)$ 。

$$1) F(s) = \frac{1}{s+1} \quad 2) F(s) = \frac{2s}{s^2+4} \quad 3) F(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+3)^2}$$

■ 关于初值定理的补充说明

若 $F(s)$ 是假分式，在求 $f(0_+)$ 时需要先将 $F(s)$ 分解成多项式与真分式 $F_1(s)$ 之和，此时初值根据真分式 $F_1(s)$ 计算，终值计算方法不变。

因为多项式对应时域的冲激信号及其导数，处于 $t=0$ 时刻，对初值所在的 $t=0_+$ 时刻没有贡献，故此时可以去掉多项式。

$$F(s) = \underbrace{P(s)}_{\text{多项式}} + \underbrace{F_1(s)}_{\text{真分式}} \longrightarrow f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s)$$

例题16-续 4) $F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 2}$ 求信号 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 和终值 $f(\infty)$ 。

4.3 单边拉普拉斯反变换

部分分式展开法

其他反变换方法

■ 部分分式展开法

有理分式:
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

当 $m \geq n$ 时, $F(s)$ 为假分式; 当 $m < n$ 时, $F(s)$ 为真分式。

$F(s)$ 为真分式 $m < n$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{\underbrace{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}_{n \text{ 个极点}}}$$

$F(s)$ 仅有单极点

部分分式形式:

$$F(s) = \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-s_n}$$

系数公式:

$$k_i = (s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}$$

部分分式对应变换对:

$$k_i e^{s_i t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{k_i}{s-s_i}$$

例题17 求象函数 $F(s) = \frac{s+4}{s^3+3s^2+2s}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 含有共轭单极点 共轭单极点 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

$$\text{部分分式形式: } F(s) = \underbrace{\left[\frac{k_1}{s - (-\alpha + j\beta)} + \frac{k_2}{s - (-\alpha - j\beta)} \right]}_{F_1(s)} + \underbrace{\cdots + \frac{k_n}{s - s_n}}_{\text{其余极点}}$$

系数公式: $\begin{cases} k_1 = [s - (-\alpha + j\beta)] F(s) \big|_{s = -\alpha + j\beta} \\ k_2 = [s - (-\alpha - j\beta)] F(s) \big|_{s = -\alpha - j\beta} = k_1^* \end{cases}$ 只需求出一个复极点对应的系数, 另一系数取共轭即可

➤ **反变换形式1** 系数 $k_{1,2}$ 为极坐标形式时:

$$k_{1,2} = |k_1| e^{\pm j\varphi} \quad F_1(s) = \frac{|k_1| e^{j\varphi}}{s - (-\alpha + j\beta)} + \frac{|k_1| e^{-j\varphi}}{s - (-\alpha - j\beta)}$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left[|k_1| e^{j\varphi} e^{(-\alpha + j\beta)t} + |k_1| e^{-j\varphi} e^{(-\alpha - j\beta)t} \right] \varepsilon(t) = |k_1| e^{-\alpha t} \left[e^{j(\beta t + \varphi)} + e^{-j(\beta t + \varphi)} \right] \varepsilon(t) \\ &= 2|k_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 含有共轭单极点 共轭单极点 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

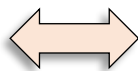
➤ 反变换形式2 系数 $k_{1,2}$ 为直角坐标形式时:

$$k_{1,2} = A \pm jB \quad F_1(s) = \frac{A + jB}{s - (-\alpha + j\beta)} + \frac{A - jB}{s - (-\alpha - j\beta)}$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left[(A + jB)e^{(-\alpha + j\beta)t} + (A - jB)e^{(-\alpha - j\beta)t} \right] \varepsilon(t) \\ &= e^{-\alpha t} \left[A(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + jB(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) \right] \varepsilon(t) \\ &= 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] \varepsilon(t) \end{aligned}$$

$$|k_1| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$f_1(t) = 2|k_1|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \varepsilon(t)$$



$$f_1(t) = 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] \varepsilon(t)$$

$$k_{1,2} = |k_1|e^{\pm j\varphi}$$

$$\varphi = \arctan \frac{B}{A}$$

$$k_{1,2} = A \pm jB$$

例题18 求象函数 $F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+4s+5)}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 含有 r 重极点

$$F(s) = \frac{B(s)}{\underbrace{(s-s_1)^r}_{r \text{ 重极点 } s=s_1} A_2(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)^r (s-s_{r+1}) \cdots (s-s_n)}$$

r 重极点 $s = s_1$

部分分式形式:

$$F(s) = \left[\frac{k_{11}}{(s-s_1)^r} + \frac{k_{12}}{(s-s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{1r}}{(s-s_1)} \right] + \sum_{j=r+1}^n \frac{k_j}{s-s_j}$$

系数公式:

$$k_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} (s-s_1)^r F(s) \Big|_{s=s_1}$$

部分分式对应变换对:

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad t^{n-1} e^{s_1 t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s-s_1)^n} \quad \frac{k_{1i}}{(n-1)!} t^{n-1} e^{s_1 t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{k_{1i}}{(s-s_1)^n}$$

例题19 求象函数 $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 为假分式 $m \geq n$ $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$

$$F(s) = \underbrace{c_{m-n} s^{m-n} + \cdots + c_1 s + c_0}_{\text{多项式}} + \underbrace{\frac{D(s)}{A(s)}}_{\text{真分式}} = P(s) + \frac{D(s)}{A(s)}$$

多项式部分:

$$P(s) = c_{m-n} s^{m-n} + \cdots + c_1 s + c_0 \quad \longleftrightarrow \quad c_{m-n} \delta^{(m-n)}(t) + \cdots + c_1 \delta'(t) + c_0 \delta(t)$$

真分式部分: 可以重复前文的操作进行部分分式展开

例题20 求象函数 $F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 其他反变换方法

$F(s)$ 含共轭单极点时的配凑法

所用变换对：

$$\cos \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \beta^2}, \quad \sin \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$e^{-\alpha t} \cos \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad e^{-\alpha t} \sin \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

当含有共轭极点时，可以尝试通过配凑和待定系数，配出对应的象函数，然后求解反变换。

例题21 求象函数 $F(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$ 的原函数 $f(t)$ 。

例题22 求象函数 $F(s) = \frac{s+6}{s^3 + 2s^2 + 4s + 8}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 其他反变换方法

$F(s)$ 不是有理分式

当 $F(s)$ 不是有理分式时，无法进行部分分式展开，需要运用常见信号的拉普拉斯变换对，结合拉普拉斯变换的性质进行反变换求解。

回顾：单边周期信号的拉普拉斯变换

$$f_T(t) \leftrightarrow \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}$$

例题23 求象函数 $F(s) = \frac{1}{s(1+e^{-2s})}$ 的原函数 $f(t)$ 。

例题24 求象函数 $F(s) = \frac{\pi(1+e^{-s})}{(s^2 + \pi^2)(1-e^{-4s})}$ 的原函数 $f(t)$ 。

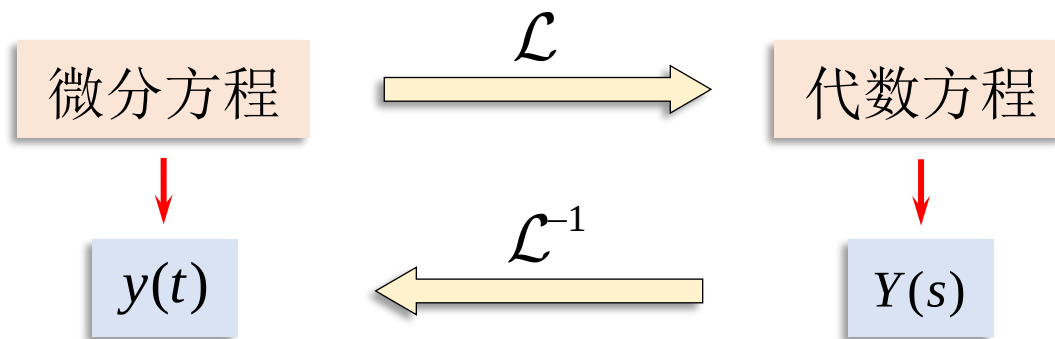
4.4 连续时间系统的复频域分析

系统微分方程的复频域解

系统函数与系统的 s 域框图

电路的复频域 (s 域) 分析

■ 系统微分方程的复频域解



以二阶LTI连续系统为例，系统的微分方程为：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

激励 $e(t)$ 在 $t = 0$ 时刻加入系统，此时 $e(0_-) = e'(0_-) = e''(0_-) = 0$ 。

对方程两端同时取单边拉普拉斯变换，根据时域微分性质，有：

$$\left[s^2 Y(s) - s y(0_-) - y'(0_-) \right] + a_1 \left[s Y(s) - y(0_-) \right] + a_0 Y(s) = b_2 s^2 E(s) + b_1 s E(s) + b_0 E(s)$$

其中 $y(0_-), y'(0_-)$ 为系统的初始状态。

■ 系统微分方程的复频域解

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) \right] + a_1 \left[sY(s) - y(0_-) \right] + a_0 Y(s) = b_2 s^2 E(s) + b_1 s E(s) + b_0 E(s)$$

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) - \left[(s + a_1)y(0_-) + y'(0_-) \right] = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)E(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s + a_1)y(0_-) + y'(0_-)}{s^2 + a_1 s + a_0}}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} E(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

与微分方程系数和
系统初始状态有关
与系统激励无关

与微分方程系数和
系统的激励有关
与初始状态无关

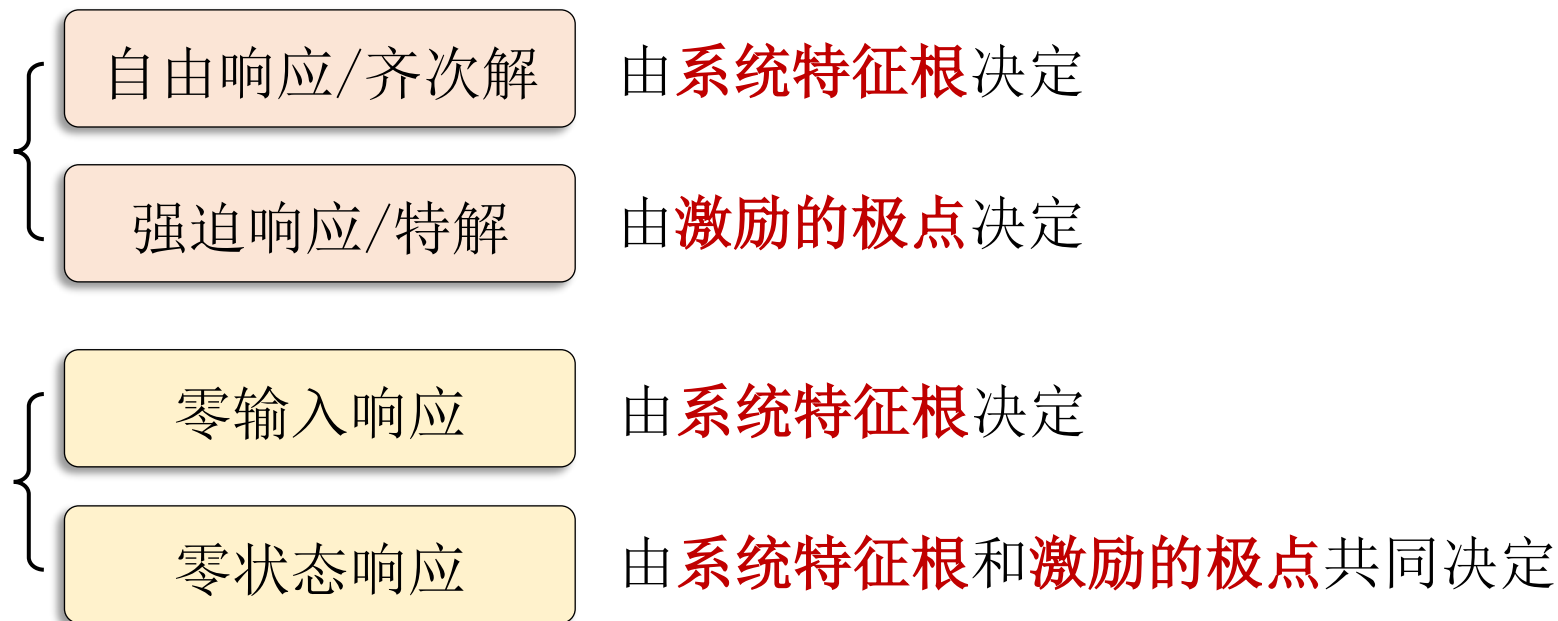
$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s) \quad \longleftrightarrow \quad y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

■ 系统微分方程的复频域解

$$Y_{zi}(s) = \frac{(s + a_1)y(0_-) + y'(0_-)}{s^2 + a_1s + a_0} \quad Y_{zs}(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} E(s)$$

系统时域解的形式由全响应 $Y(s)$ 的极点决定。而 $Y(s)$ 的极点由系统特征方程形成的极点，和系统激励信号的极点组成。

系统特征方程： $s^2 + a_1s + a_0 = 0$ 特征根 = 特征方程形成的极点



例题25

已知系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e'(t) + 6e(t)$ ，激励信号为 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，系统的初始状态 $y(0_-) = 2, y'(0_-) = 1$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 、零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和全响应 $y(t)$ 。

■ 系统函数与系统的 s 域框图

系统函数

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{E(s)}$$

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

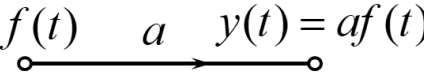
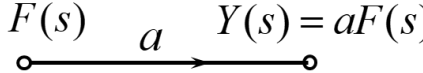
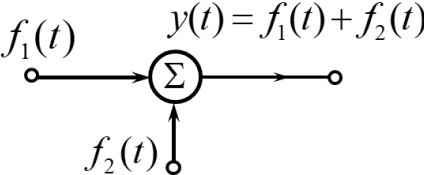
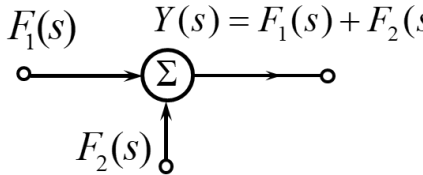
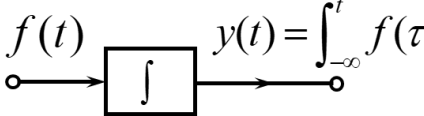
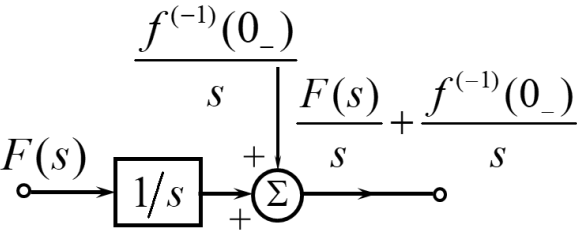
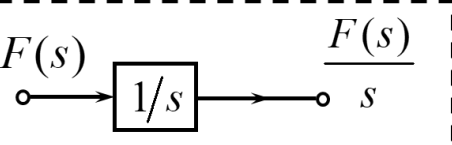
$$Y_{zs}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} E(s) \quad \longrightarrow \quad H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

系统函数只与微分方程的系数和阶数有关。因此它只与系统的结构、参数有关，而与系统的激励、初始状态等均无关，反映的是系统固有特性。

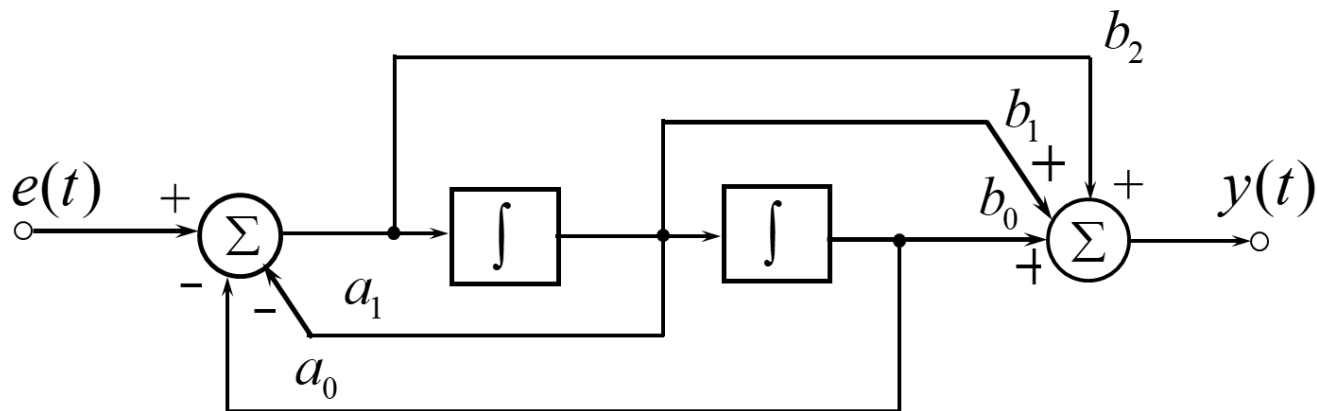
$$Y_{zs}(s) = E(s) \cdot H(s) \leftrightarrow y_{zs}(t) = e(t) * h(t) \quad h(t) \leftrightarrow H(s)$$

■ 系统函数与系统的 s 域框图

系统的 s 域框图

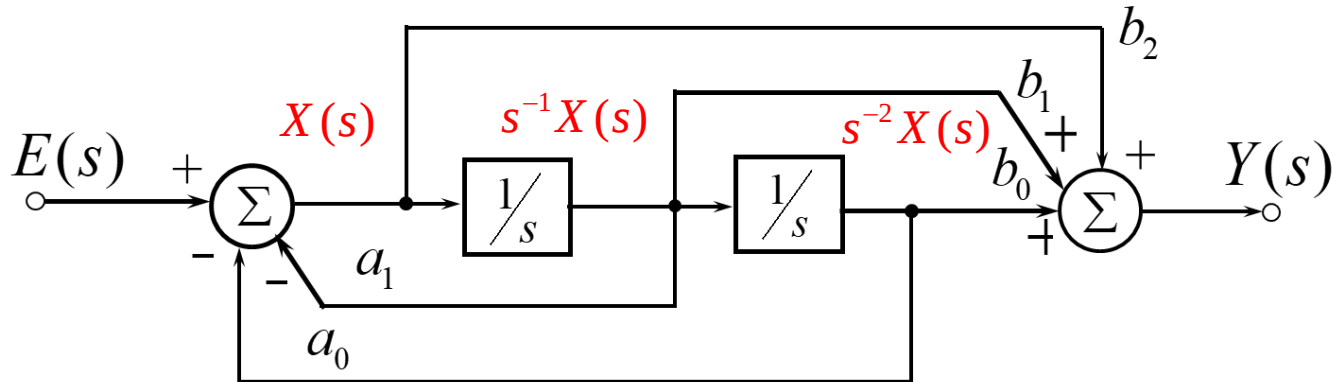
	时域框图	s 域框图
1) 数乘器	$f(t) \xrightarrow{a} y(t) = af(t)$ 	$F(s) \xrightarrow{a} Y(s) = aF(s)$ 
2) 加法器	$f_1(t) \xrightarrow{\quad} \Sigma \xrightarrow{\quad} y(t) = f_1(t) + f_2(t)$ $f_2(t) \xrightarrow{\quad} \Sigma$ 	$F_1(s) \xrightarrow{\quad} \Sigma \xrightarrow{\quad} Y(s) = F_1(s) + F_2(s)$ $F_2(s) \xrightarrow{\quad} \Sigma$ 
3) 积分器	$f(t) \xrightarrow{\quad} \int \xrightarrow{\quad} y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 	$\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$ $\downarrow$ $\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$  $F(s) \xrightarrow{\quad} \frac{1}{s} \xrightarrow{\quad} \frac{F(s)}{s}$  系统函数与初始状态无关 因此常用零状态的 s 域模型

■ 系统函数与系统的 s 域框图



时域框图

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$$



s 域框图

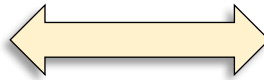
$$E(s) - a_1 s^{-1} X(s) - a_0 s^{-2} X(s) = X(s) \quad b_2 X(s) + b_1 s^{-1} X(s) + b_0 s^{-2} X(s) = Y(s)$$

$$E(s) = (1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}) \cdot X(s)$$

$$Y(s) = (b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}) \cdot X(s)$$

■ 系统函数，微分方程与系统 s 域框图的转换

微分方程



系统函数

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$



$$s^2$$

$$a_1 s$$

$$a_0$$

$$b_2 s^2$$

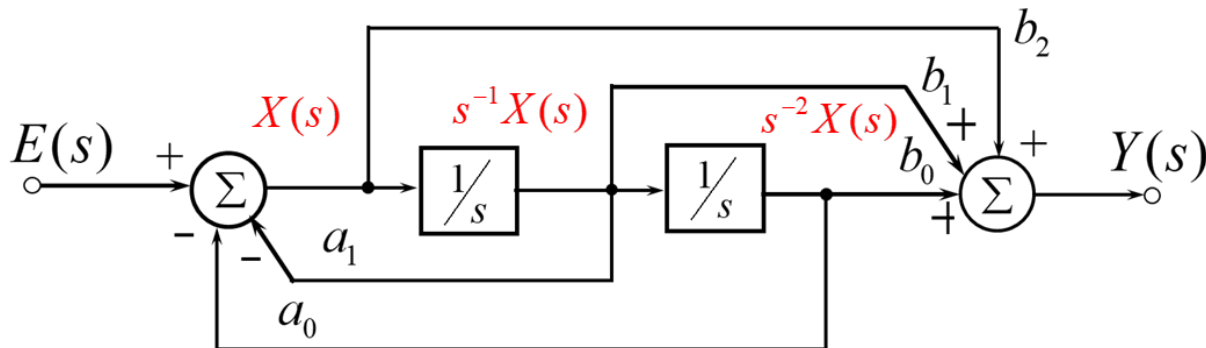
$$b_1 s$$

$$b_0$$

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$$

系统框图



积分 $\Leftrightarrow 1/s$

求导 $\Leftrightarrow s$

例题26

- 1) 已知系统微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e'(t) - 3e(t)$ ，求系统函数 $H(s)$ ；
- 2) 已知连续系统的系统函数 $H(s) = \frac{s+6}{s^2+5s+6}$ ，写出系统的微分方程。

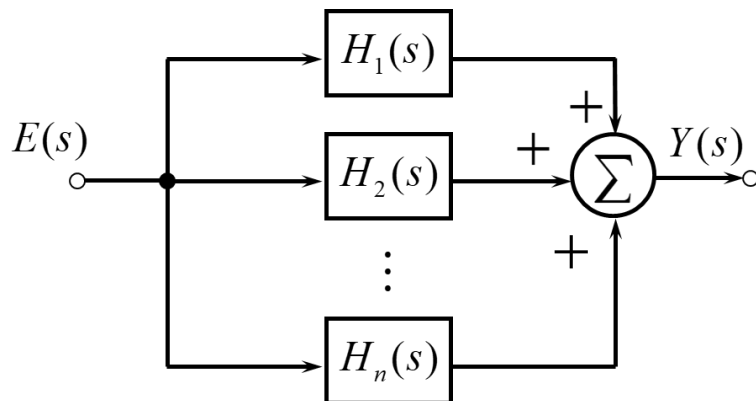
例题27

一个LTI连续系统的系统函数为 $H(s) = H_0 \frac{s+2}{s^2+4s+3}$ ， H_0 为常数，已知此系统阶跃响应的终值为1。

- 1) 写出此系统的微分方程；
- 2) 求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

■ 系统函数与系统的 s 域框图

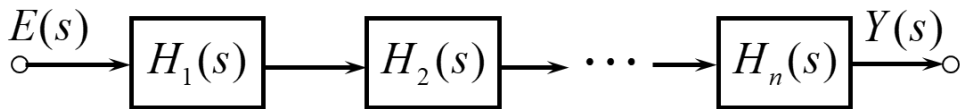
➤ 并联系统：系统函数为子系统函数之和。（时域为相加）



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \cdots + h_n(t)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s)$$

➤ 级联系统：系统函数为子系统函数之积。（时域为卷积）

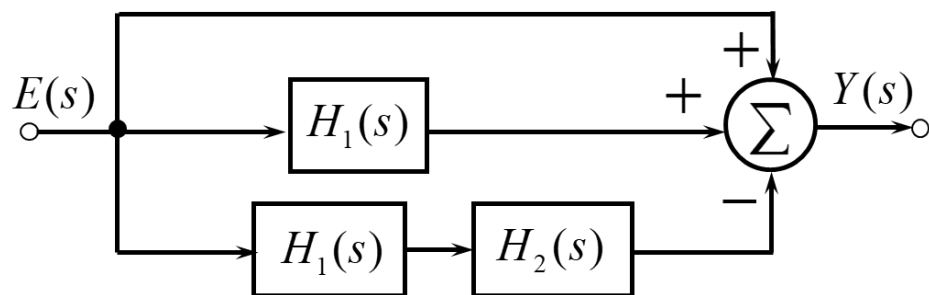


$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_n(t)$$

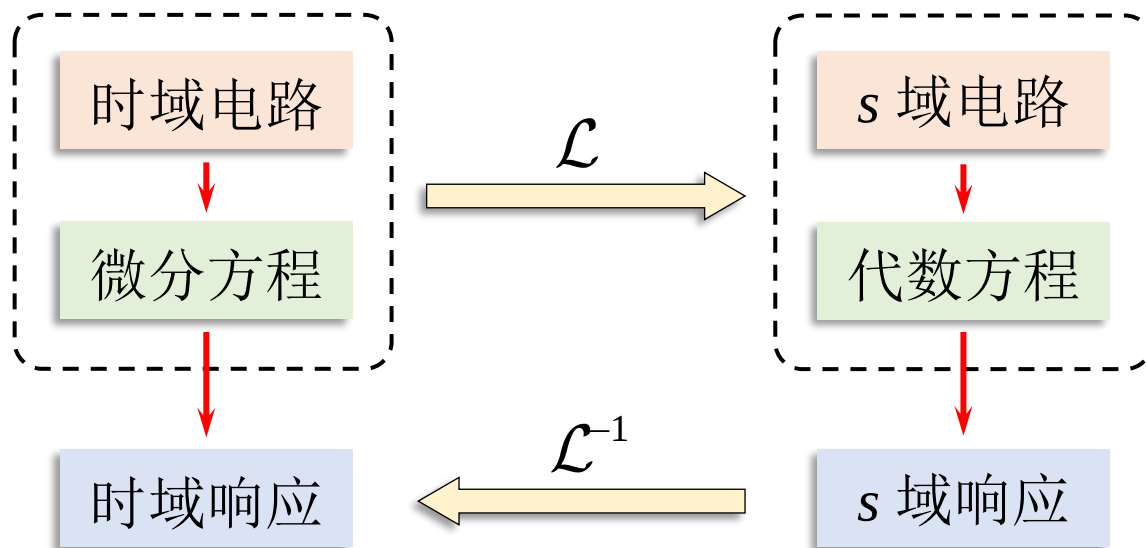
$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots H_n(s)$$

例题28

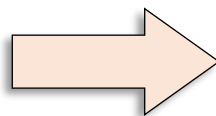
某LTI系统如图，已知 $H_1(s) = \frac{1}{s}$ ，系统的阶跃响应 $g(t) = (t + e^{-t})\varepsilon(t)$ ，试求子系统的系统函数 $H_2(s)$ 与冲激响应 $h_2(t)$ 。



■ 电路的复频域（s 域）分析



- 电路理论
- 电路元器件
- 电路系统模型
- 电路求解方法



思考：

如何用 s 域表示？

■ 电路的复频域（s 域）分析

基尔霍夫定律的 s 域形式

基尔霍夫定律是线性电路分析的理论基础，分为基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）。

$$\begin{cases} \sum i(t) = 0 & \text{集中电路任一节点，流入电流的代数数和为0} \\ \sum u(t) = 0 & \text{集中电路任一回路，各支路电压代数数和为0} \end{cases}$$



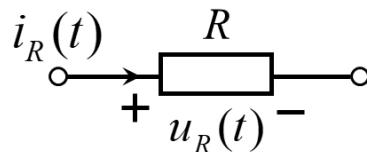
$$\begin{cases} \sum I(s) = 0 & \text{集中电路任一节点，流入电流象函数代数数和为0} \\ \sum U(s) = 0 & \text{集中电路任一回路，各支路电压象函数代数数和为0} \end{cases}$$

■ 电路的复频域（s 域）分析

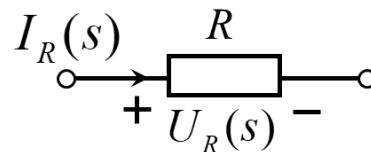
RLC 元件的 s 域模型 假设元件电压和电流选取**关联参考方向**。

电阻元件

$$u_R(t) = Ri_R(t) \iff U_R(s) = RI_R(s)$$



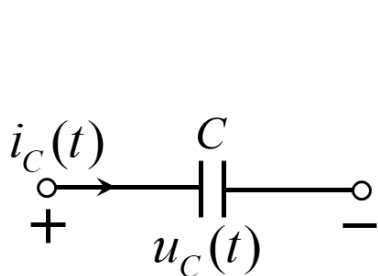
时域模型



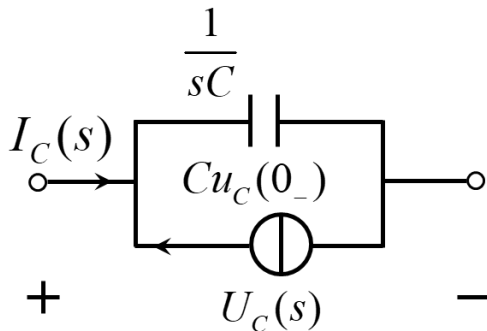
s 域模型

电容元件

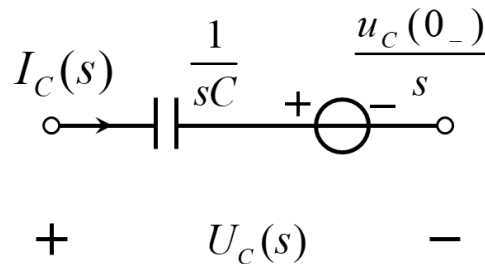
$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \iff \begin{cases} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-) \\ U_C(s) = \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{I_C(s)}{sC} \end{cases}$$



时域模型



并联形式的 s 域模型



串联形式的 s 域模型

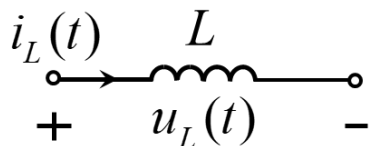
■ 电路的复频域（s 域）分析

RLC 元件的 *s* 域模型

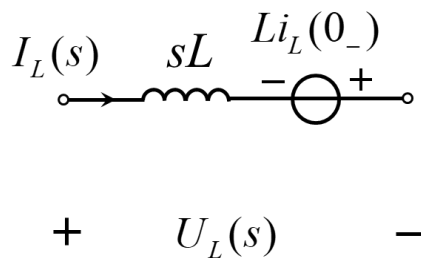
假设元件电压和电流选取**关联参考方向**。

电感元件

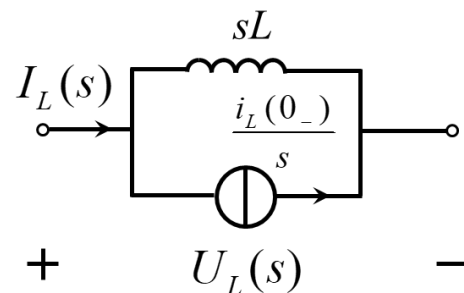
$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \iff \begin{cases} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-) \\ I_L(s) = \frac{U_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0_-)}{s} \end{cases}$$



时域模型



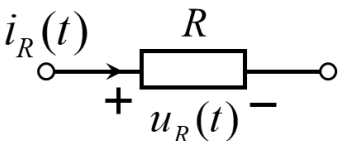
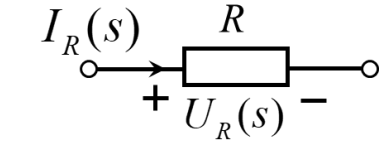
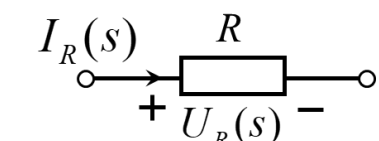
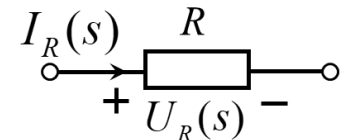
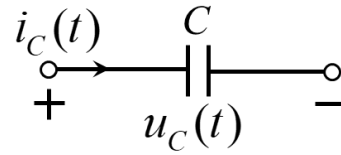
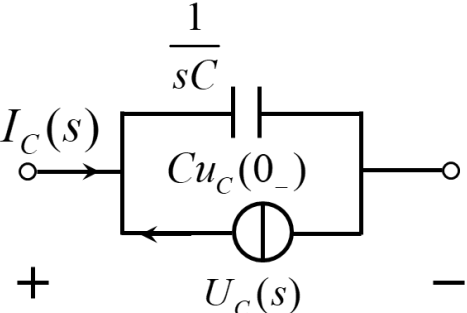
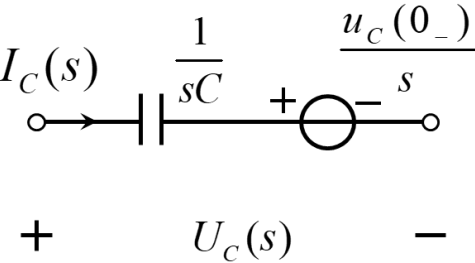
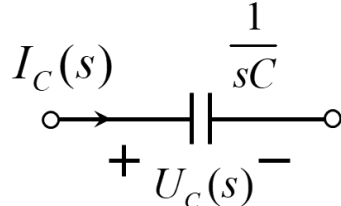
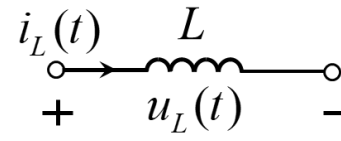
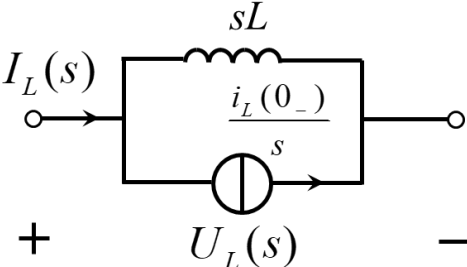
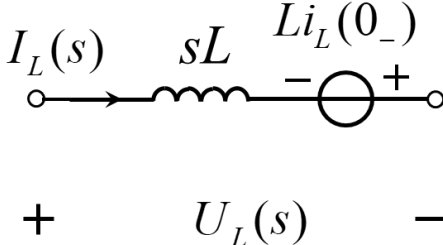
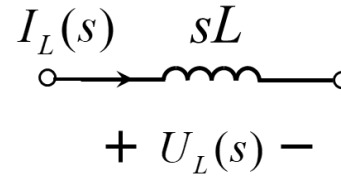
串联形式的 *s* 域模型



并联形式的 *s* 域模型

■ 电路的复频域（s 域）分析

RLC 元件的 s 域模型 假设元件电压和电流选取**关联参考方向**。

电路元件	并联形式的s域模型	串联形式的s域模型	零状态的s域模型
			
			
			

■ 电路的复频域（ s 域）分析

电路的复频域（ s 域）分析法举例

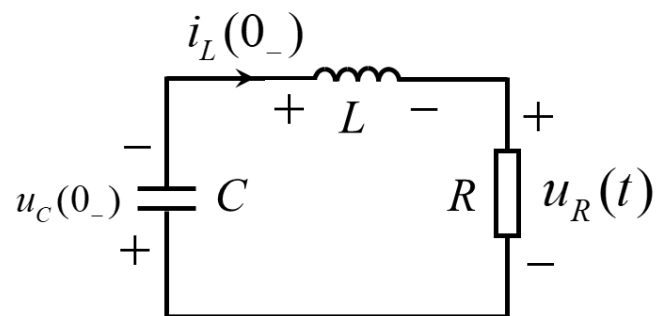
电路分析中学过的若干分析方法均可拿来在电路的复频域分析中使用。如：无源支路的串、并联化简，电压源、电流源的等效变换，网孔电流分析法，节点电压分析法等。

在 s 域的电路模型中，数学表达式由微分方程转为代数方程，求出响应的象函数，再取拉普拉斯反变换求得对应的时域响应。

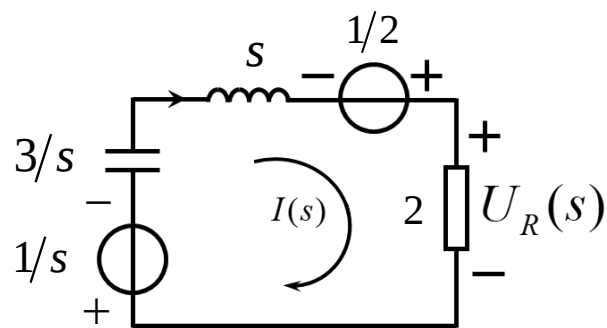
需注意的是：在作电路的 s 域模型时，**所有电源也要对应成象电源，并注意参考方向。**

例题29

下图所示电路，已知元件参数 $L=1\text{H}$, $C=\frac{1}{3}\text{F}$, $R=2\Omega$ ，电容的初始电压 $u_C(0_-)=1\text{V}$ ，电感的初始电流 $i_L(0_-)=0.5\text{A}$ ，试用电路的 s 域模型求零输入响应 $u_R(t)$ 。



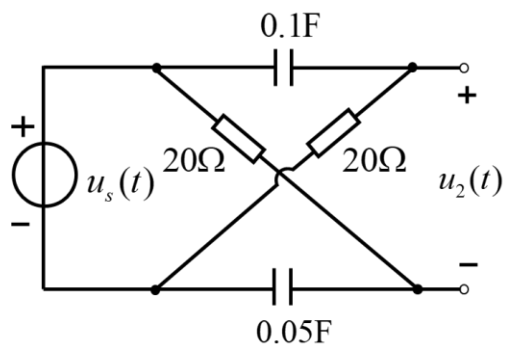
题图



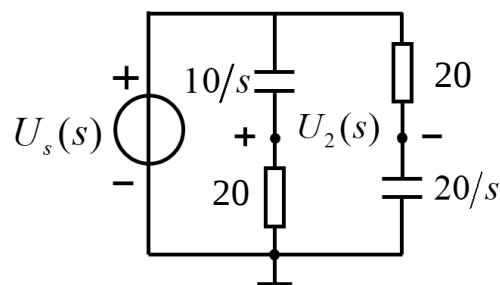
s 域电路

例题30

如图所示的电路中，若以 $u_2(t)$ 作为响应，试用电路的 s 域分析法求解系统的冲激响应。



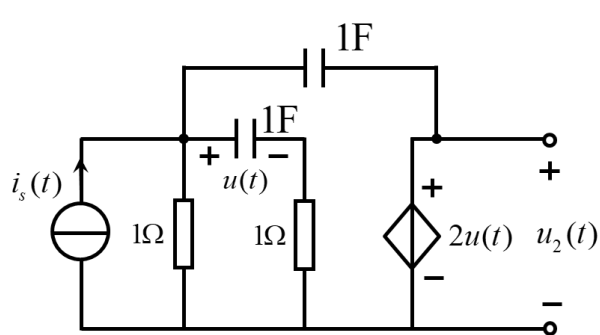
题图



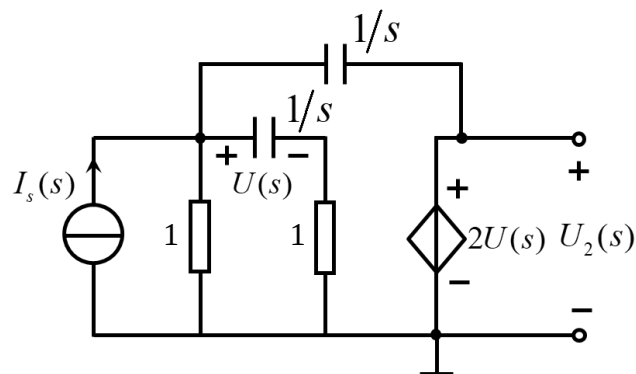
s 域电路（零状态）

例题31

如图所示的电路中，以电流源 $i_s(t)$ 作为激励， $u_2(t)$ 作为响应，试用电路的 s 域分析法求解系统的冲激响应。



题图

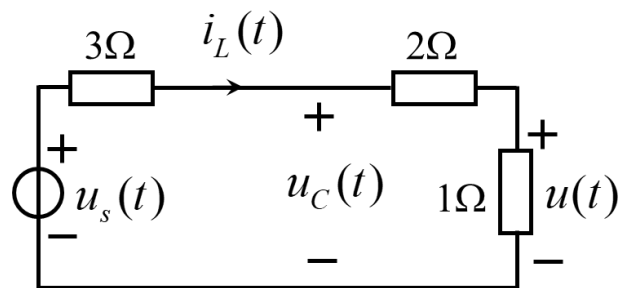


s 域电路（零状态）

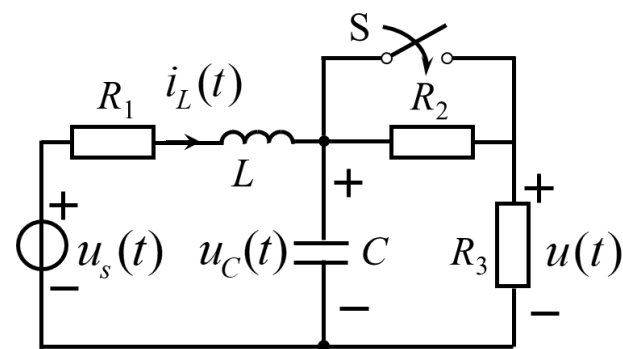
例题32

图示电路，换路（ $t=0$ 时开关 S 闭合，实现换路）之前已达到稳态，已知 $u_s(t)=12\text{V}$ ， $L=1\text{H}$ ， $C=1\text{F}$ ， $R_1=3\Omega$ ， $R_2=2\Omega$ ， $R_3=1\Omega$ ，利用 s 域电路模型求 $u_{zi}(t)$ ， $u_{zs}(t)$ 和全响应 $u(t)$ 。

Step1: 确定初始状态



稳态电路

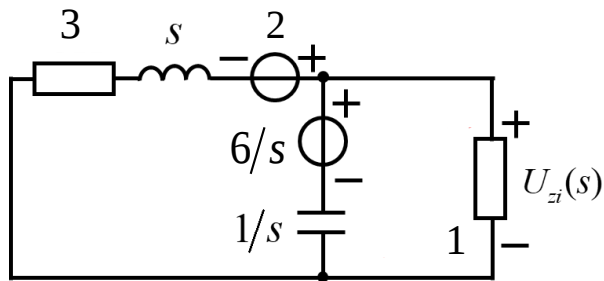


题图

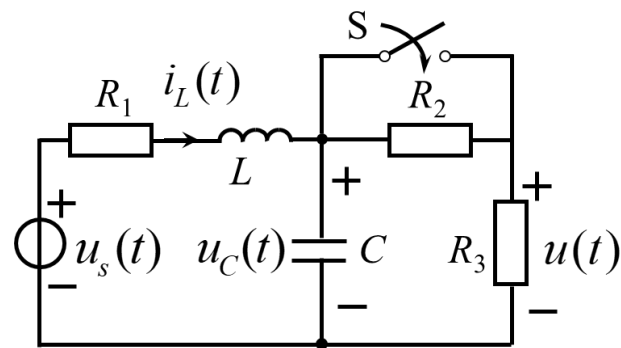
例题32 $u_s(t) = 12\text{V}$ $L = 1\text{H}$, $C = 1\text{F}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$

换路后, 电阻 R_2 被短路 $i_L(0_-) = 2\text{A}$ $u_C(0_-) = 6\text{V}$

Step2: 求零输入响应 $u_s(t) = 0$



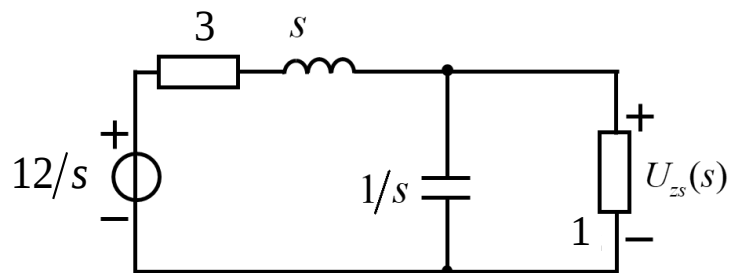
s 域电路 (零输入)



题图

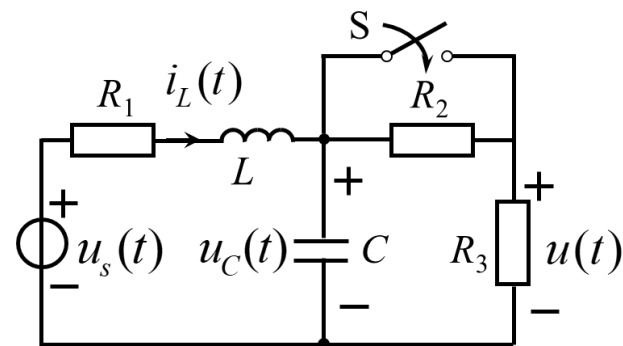
例题32 $u_s(t) = 12\text{V}$ $L = 1\text{H}$, $C = 1\text{F}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$

Step3: 求零状态响应 $i_L(0_-) = 0$ $u_C(0_-) = 0$



s 域电路（零状态）

$$u_s(t) = 12\varepsilon(t)$$



题图

■ 电路的复频域（s 域）分析

s 域电路分析思路总结

➤ 分析初始状态

在稳态电路中，将**电容视为开路**，**电感视为短路**；

在含有电感、电容的电路中，初始状态指 $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$ 。

➤ s 域零输入响应

激励置零，**留初始状态**（形式为**附加电源**）；

注意附加电源的电压极性或电流方向。

➤ s 域零状态响应

L 和 C 元件的附加电源置零，**保留激励**；

激励需要变换为象函数。

元件计算阻抗

时域		s域
R	$\Leftrightarrow$	R
L	$\Leftrightarrow$	sL
C	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{sC}$

4.5 系统函数与系统特性

系统函数的零点与极点

系统函数零极点分布与系统时域特性

系统函数与系统的稳定性

系统函数与系统的频域特性

■ 系统函数的零点与极点

系统函数的零点与极点

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$H(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

系统函数的零点： $s = z_j$

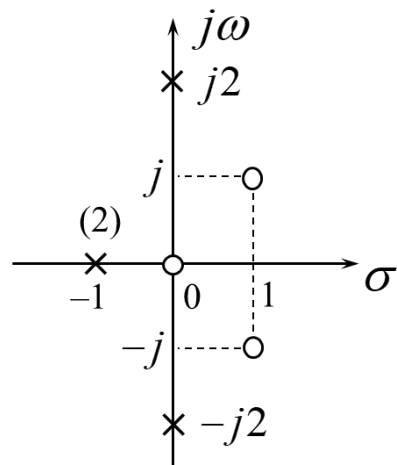
系统函数的极点： $s = p_i$

系统函数的零、极点分布图

把系统函数的零、极点画在 s 平面上的图形，称为系统函数的零、极点分布图。

一般用“○”表示零点，用“×”表示极点，高阶的零、极点需要在对应点处标明阶数。

■ 系统函数的零点与极点



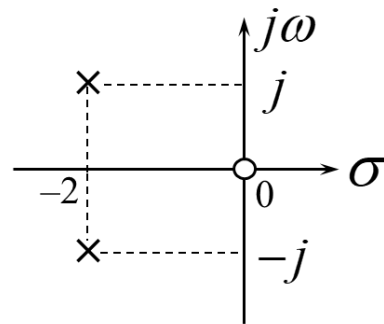
$$H(s) = \frac{s[(s-1)^2 + 1]}{(s+1)^2(s^2 + 4)} = \frac{s[s-(1-j)][s-(1+j)]}{(s+1)^2(s+2j)(s-2j)}$$

三个零点： $z_1 = 0$, $z_2 = 1-j$, $z_3 = 1+j$ （均为一阶零点）

四个极点： $\underline{p_{1,2} = -1}$, $\underline{p_3 = -2j}$, $\underline{p_4 = 2j}$
 二阶极点 一阶极点

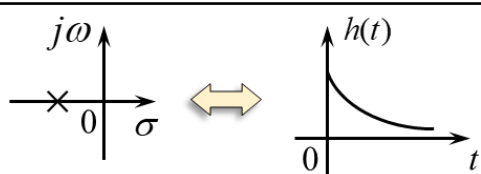
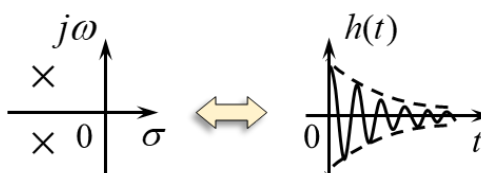
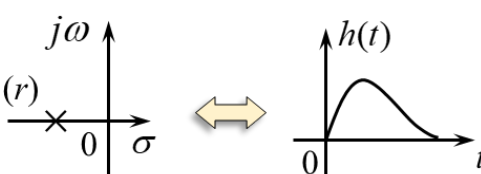
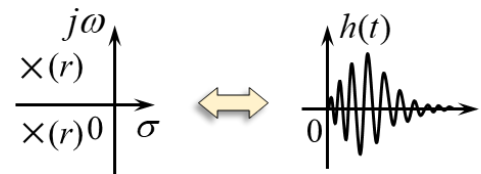
例题33

已知连续系统系统函数 $H(s)$ 的零极点分布如图，且 $h(0_+) = 2$ ，求该系统的系统函数 $H(s)$ 。



■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

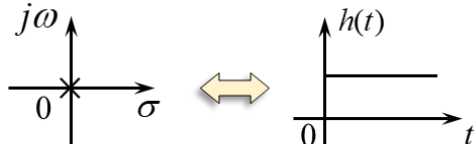
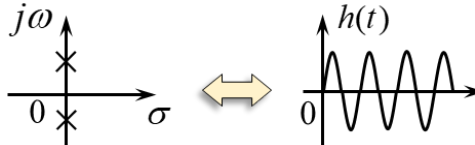
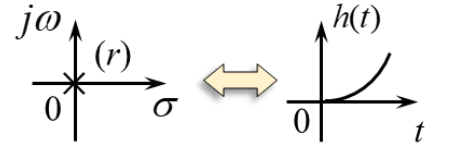
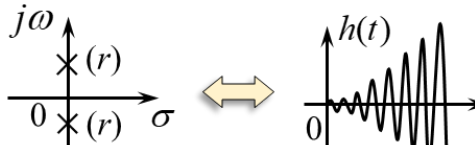
s 平面左开半平面的极点

极点形式	分母多项式因子	时域响应形式	极点分布与波形
一阶实极点 $p_i = -\alpha \ (\alpha > 0)$	$s + \alpha$	$Ke^{-\alpha t} \varepsilon(t)$	
共轭单极点 $p_i = -\alpha \pm j\omega_0$	$(s + \alpha)^2 + \omega_0^2$	$Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t)$	
r 重极点	$(s + \alpha)^r$	$K_i t^i e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	
	$\left[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2 \right]^r$	$K_i t^i e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	

$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$ 极点在左开半平面时, 响应最终趋于0, 为暂态响应

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

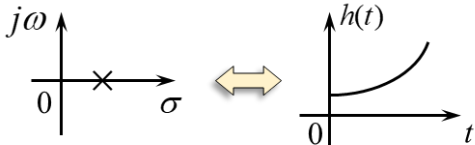
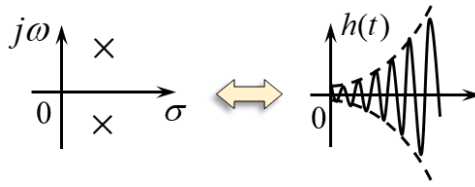
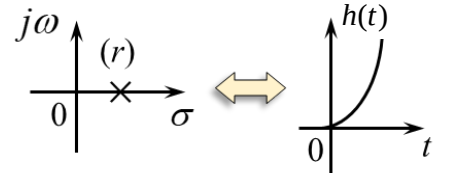
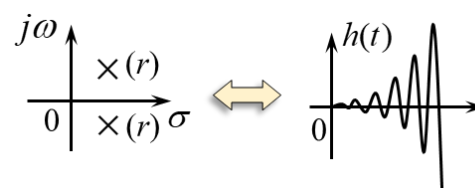
s 平面虚轴上的极点

极点形式	分母多项式因子	时域响应形式	极点分布与波形
一阶实极点 $p_i = 0$	s	$K\varepsilon(t)$	
共轭单极点 $p_i = \pm j\omega_0$	$s^2 + \omega_0^2$	$K \cos(\omega_0 t + \varphi)\varepsilon(t)$	
r 重极点	s^r	$K_i t^i \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	
	$(s^2 + \omega_0^2)^r$	$K_i t^i \cos(\omega_0 t + \varphi_i)\varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	

虚轴上的一阶极点响应为稳态分量，高阶极点响应为递增函数

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

s 平面右开半平面的极点

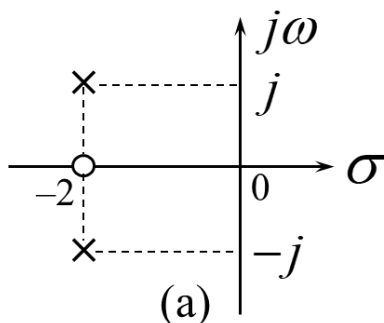
极点形式	分母多项式因子	时域响应形式	极点分布与波形
一阶实极点 $p_i = \alpha \ (\alpha > 0)$	$s - \alpha$	$Ke^{\alpha t} \varepsilon(t)$	
共轭单极点 $p_i = \alpha \pm j\omega_0$	$(s - \alpha)^2 + \omega_0^2$	$Ke^{\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t)$	
r 重极点	$(s - \alpha)^r$	$K_i t^i e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r - 1)$	
	$\left[(s - \alpha)^2 + \omega_0^2\right]^r$	$K_i t^i e^{\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r - 1)$	

$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$ 极点在右开半平面时，响应为递增函数

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

零点与时域特性的关系

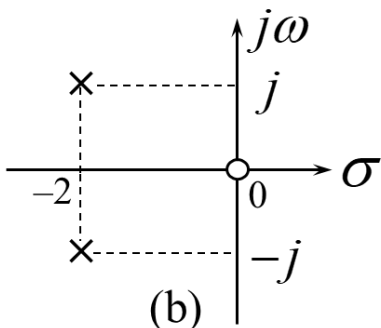
系统函数的零点分布不影响系统的响应形式，只影响响应的幅度和相位。



$$H_a(s) = H_a \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 1}$$



$$h_a(t) = H_a e^{-2t} \cos t \varepsilon(t)$$



$$H_b(s) = H_b \frac{s}{(s+2)^2 + 1} = H_b \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} - H_b \frac{2}{(s+2)^2 + 1}$$



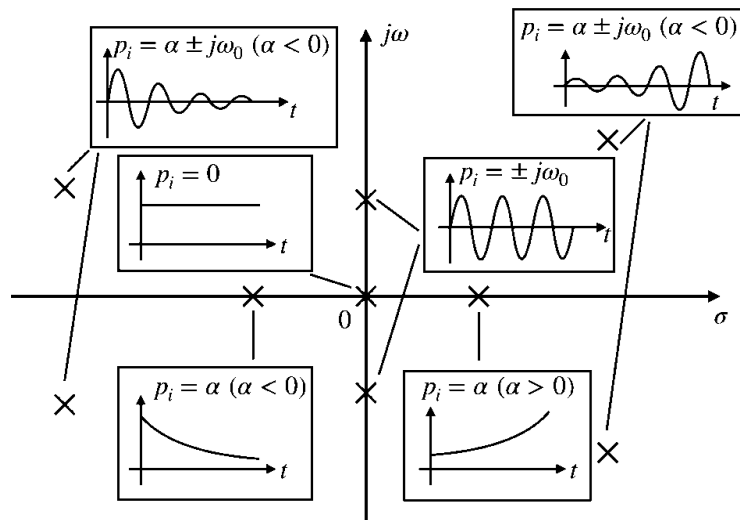
$$h_b(t) = H_b e^{-2t} (\cos t - 2 \sin t) \varepsilon(t) = \sqrt{5} H_b e^{-2t} \cos(t + \arctan 2) \varepsilon(t)$$

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

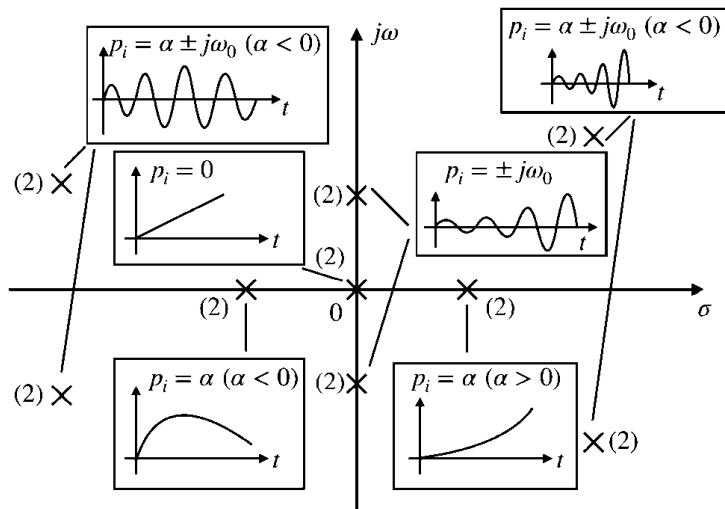
➤ 总结

- **左开半平面极点：** 系统响应当 $t \rightarrow \infty$ 时，**衰减到0**；
- **虚轴上的一阶极点：** 系统响应**幅度稳定**或者**等幅振荡**；
- **虚轴上二阶以上的极点以及右开半平面的极点：** 系统响应随着 $t \rightarrow \infty$ 而**趋于无穷大**；
- **零点：** 不影响系统响应形式，只影响响应的**幅度和相位**。

一阶极点



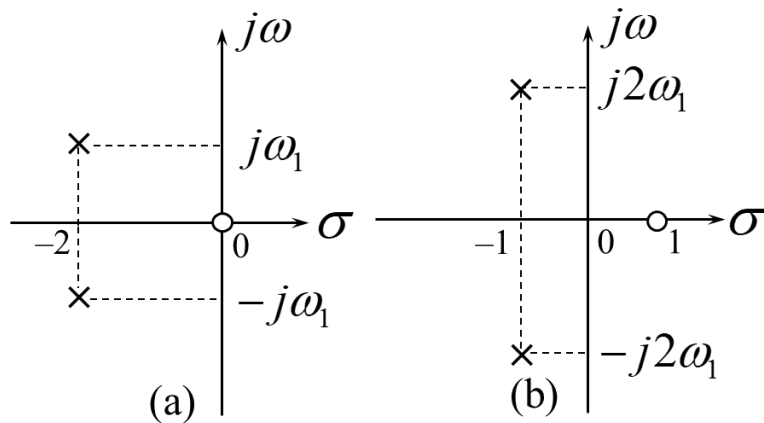
二阶极点



■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

➤ 总结

系统函数极点的实部 σ 影响响应的变化趋势；虚部 ω 影响响应的振荡频率快慢。



$$\begin{cases} \sigma \Rightarrow e^{\sigma t} \varepsilon(t) \\ \omega \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) \varepsilon(t) \end{cases}$$

衰减速度： a 系统 $>$ b 系统

振荡频率： a 系统 $<$ b 系统

深刻理解零极点和系统响应的关系，给出一个简单的系统，通过分析零极点分布图，可以直接得出系统响应的大致形式，进而判断系统特性。

■ 系统函数与系统的稳定性

因果系统及判断方法 零状态响应不出现于激励信号之前的系统。

● 时域判断

系统的冲激响应 $h(t)$ 为因果信号，即 $h(t) = 0, t < 0$ 。

● s 域判断

系统函数 $H(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_0$ ，即收敛域在最右侧极点所在收敛轴的右侧。

稳定系统及判断方法 对有界输入，零状态响应也有界的系统。

● 时域判断 系统的冲激响应 $h(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq M$ 。

● s 域判断 系统函数 $H(s)$ 收敛域必须包含虚轴 $s = j\omega$ 。

■ 系统函数与系统的稳定性

因果稳定系统及判断方法

- 时域判断 系统冲激响应 $h(t)$ 因果且绝对可积, 即 $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \leq M$ 。
- s 域判断

因果稳定系统

$H(s)$ 的极点全部在 s 平面的左开半平面。

例:

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

因果临界稳定系统

$H(s)$ 在虚轴上仅有一阶极点, 其余极点全部在左开半平面。

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+3)}$$

因果不稳定系统

$H(s)$ 在虚轴上含有二阶及以上极点, 或在右开半平面含有极点。

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{s}{(s+3)(s-1)}$$

■ 系统函数与系统的稳定性

连续系统的稳定性准则
$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

➤ 充分必要条件：罗斯（Routh）准则

必要条件
$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

若系统稳定，则分母多项式 $A(s)$ 系数均满足 $a_i > 0$ ，无缺项；

注：若 $A(s)$ 系数缺项或有负项，则系统必然不稳定。

充分条件

若罗斯阵列中第一列元素符号相同，此时 $H(s)$ 所有极点都在 s 平面的左开半平面，系统稳定。

若罗斯阵列第一列元素符号不相同，变号的次数为 $A(s) = 0$ 的根在右开半平面的个数，即右开半平面系统极点的个数。

■ 系统函数与系统的稳定性

连续系统的稳定性准则

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

罗斯阵列

共 $n + 1$ 行 之后为全 0 行	1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$	}	由 $A(s)$ 多项式 的系数构成
	2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$		
	3	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	$\cdots$	}	第3行后系数 需要计算
	4	d_{n-1}	d_{n-3}	d_{n-5}	$\cdots$		
	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
	$n + 1$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		

第3行后系数的运算规则：

$$c_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad c_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$d_{n-1} = \frac{-1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix} \quad d_{n-3} = \frac{-1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ c_{n-1} & c_{n-5} \end{vmatrix}$$

例题34 已知系统函数分母多项式 $A(s)$ 如下，判别系统的稳定性。

1) $A(s) = s^3 + 4s^2 - 3s + 2$

$A(s)$ 的系数有负项，系统不稳定；

2) $A(s) = 2s^3 + 7s + 9$

$A(s)$ 缺 s^2 项，系统不稳定；

3) $A(s) = 2s^4 + s^3 + 12s^2 + 8s + 2$

$A(s)$ 的系数均为正，满足必要条件，判别稳定性需列写罗斯阵列：

1	2	12	2
2	1	8	0
3	-4	2	0
4	8.5	0	0
5	2	0	0

➤ 阵列第一列元素符号正负改变两次，因此系统函数含两个右开半平面的极点，系统不稳定。

例题34-续 已知系统函数分母多项式 $A(s)$ 如下，判别系统的稳定性。

4) $A(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$

5) $A(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 6s + 4$

两种特殊情况：

① 第 1 列提前出现 0：用无穷小量 ε 代替；

② 提前出现全 0 行：构造辅助多项式。

1	1	2	3
2	1	2	0
3	0(ε)	3	0
4	$2 - \frac{3}{\varepsilon}$	0	0
5	3	0	0

1	$1s^4$	$4s^2$	$4s^0$
2	$3s^3$	$6s^1$	0
3	$2s^2$	$4s^0$	0
4	0	$4s^1$	0
5	$4s^0$	0	0

$$P(s) = 2s^2 + 4$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s$$

$$P(s) = 2s^2 + 4 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{2}j$$

➤ 设 ε 从正向趋于 0，第一列元素符号正负改变两次，系统函数含两个右开半平面的极点。

➤ 第一列元素无正负变化，右开半平面无极点，但提前出现全 0 行，故虚轴上有一阶极点 $\pm\sqrt{2}j$ ，系统临界稳定。

例题35

已知连续系统的系统函数 $H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k}$ ，为使系统稳定，求常数 k 的取值范围。

■ 系统函数与系统的稳定性

连续系统的稳定性准则

二阶情形 $A(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

罗斯阵列

共 3 行

之后为全 0 行

1	a_2	a_0
2	a_1	0
3	c_{n-1}	c_{n-3}



1	a_2	a_0
2	a_1	0
3	a_0	0

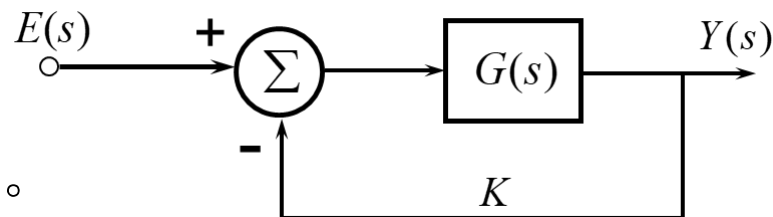
$$c_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

则二阶系统为稳定系统的条件为： $A(s)$ 的系数 $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

例题36 图示系统，已知 $G(s) = \frac{s}{s^2 - 3s + 3}$ ， K 为常数。

1) 求使系统稳定的 K 值的取值范围；

2) 当 $K = 3$ 时，求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

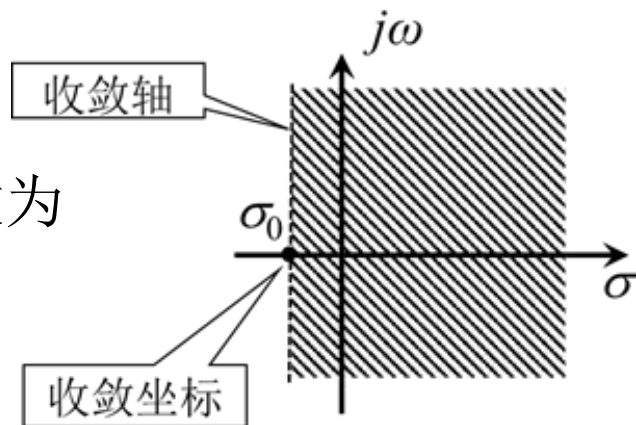


■ 系统函数与系统的频域特性

连续系统的频率响应函数

给定**因果稳定**系统，其频率响应函数为

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$



条件：系统函数**极点均位于 s 平面的左开半平面**，即在虚轴上收敛。

系统函数零、极点与频率响应特性

$$H(s) = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s-z_j)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} \quad (H_0 > 0)$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}}$$

$$\begin{cases} \text{零矢量: } j\omega - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } j\omega - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$

■ 系统函数与系统的频域特性

系统函数零、极点与频率响应特性

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}} \begin{cases} \text{零矢量: } j\omega - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } j\omega - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$
$$= H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m)}}{A_1 A_2 \cdots A_n e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

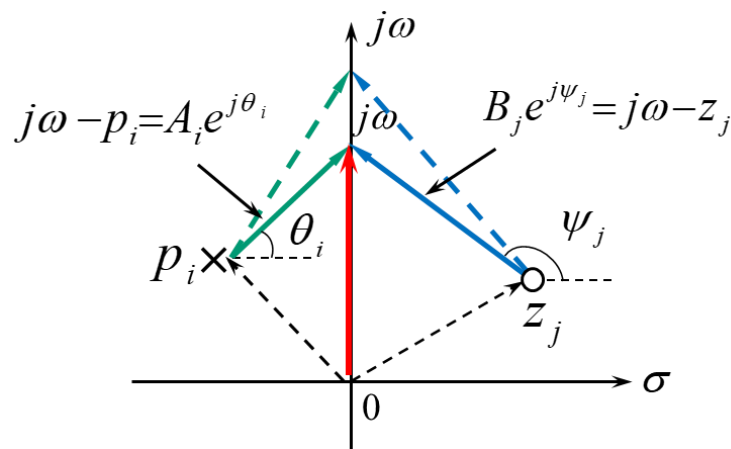
幅频响应特性

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n} = H_0 \frac{\text{零矢量模值之积}}{\text{极矢量模值之积}}$$

相频响应特性

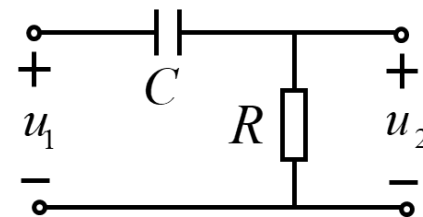
$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &= \text{零矢量相角之和} - \text{极矢量相角之和} \end{aligned}$$

频率特性几何画法

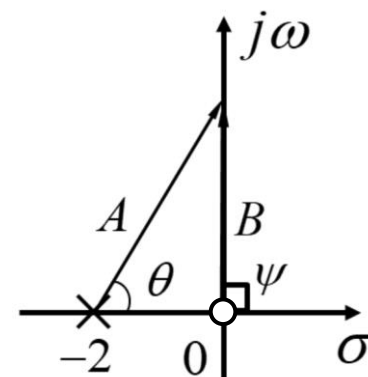


当 ω 沿虚轴移动时（即频率发生变化），各矢量的模和相位角都会随时变化，因此根据各矢量随着 ω 变化的情况，可画出幅频特性和相频特性曲线。

例题37 已知图示电路，其中 $R = 1\Omega$ ， $C = 0.5F$ 。



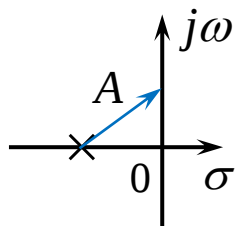
- 1) 求该系统的频率响应函数 $H(j\omega)$;
- 2) 粗略作出幅频、相频特性曲线，并判断系统特性;
- 3) 假设输入 $e(t) = 2 + 4\cos 2t + 10\cos 4t$ ，求系统稳态响应 $y_{ss}(t)$ 。



■ 系统函数与系统的频域特性

零极点分布与频率特性关系

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0 \quad (\alpha > 0)$$

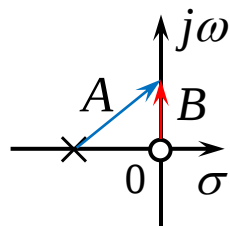


$$H(s) = \frac{K}{s + \alpha}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{A}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| = \frac{K}{A} < \infty \\ |H(j\infty)| \rightarrow 0 \end{cases}$$

低通特性

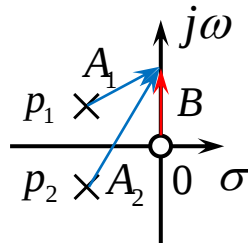


$$H(s) = \frac{Ks}{s + \alpha}$$

$$|H(j\omega)| = K \frac{B}{A}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| = 0 \\ |H(j\infty)| \rightarrow K < \infty \end{cases}$$

高通特性

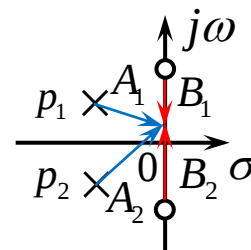


$$H(s) = \frac{Ks}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$|H(j\omega)| = K \frac{B}{A_1 A_2}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| = 0 \\ |H(j\infty)| \rightarrow 0 \end{cases}$$

带通特性



$$H(s) = \frac{K(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$|H(j\omega)| = K \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| < \infty \\ |H(j\infty)| \rightarrow K < \infty \\ |H(j\omega_0)| = 0 \end{cases}$$

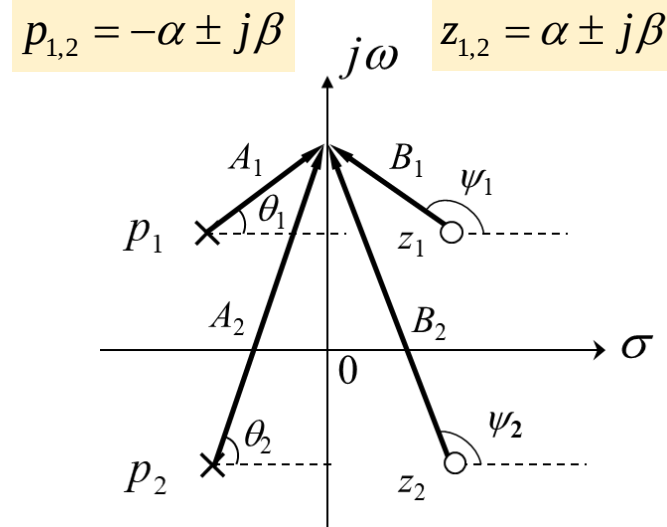
带阻特性

实际中系统零极点可以配置多个，此处只给出较为简单的形式。

■ 系统函数与系统的频域特性

全通系统

全通系统指系统函数极点位于 s 平面左半平面，零点位于 s 平面右半平面，而且零点与极点关于虚轴镜像对称的系统，其系统函数称为全通函数，幅频响应为一常数。

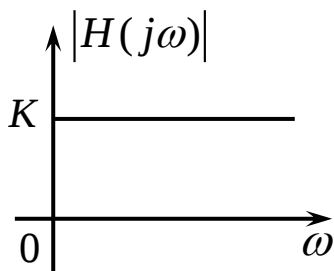


$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$z_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

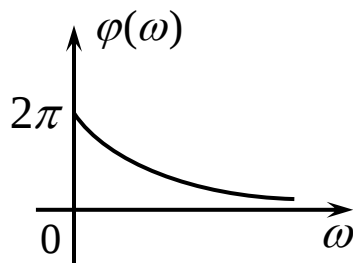
幅频响应特性

$$|H(j\omega)| = K \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2} = K$$



相频响应特性

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \psi_1 + \psi_2 - \theta_1 - \theta_2 \\ &= 2\pi - 2(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$



$$\begin{cases} A_1 = B_1, & A_2 = B_2 \\ \theta_1 + \psi_1 = \pi, & \theta_2 + \psi_2 = \pi \end{cases}$$

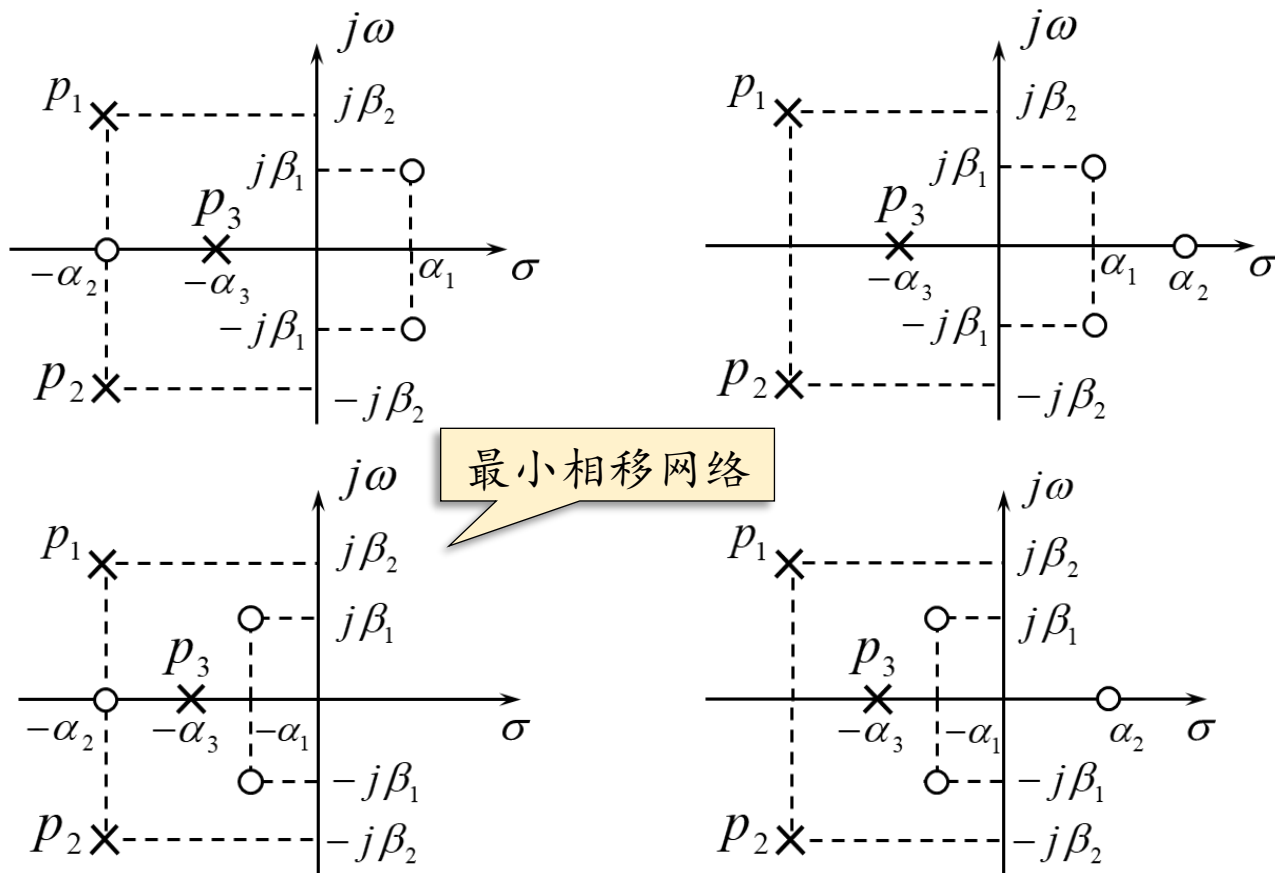
$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$H(j\omega) = K \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2} e^{j(\psi_1 + \psi_2 - \theta_1 - \theta_2)}$$

■ 系统函数与系统的频域特性

最小相移系统

对于相同幅频特性的因果稳定系统，所有零点均在左半平面的系统称为最小相移系统，其相移函数 $\varphi(\omega)$ 最小，相应网络称为最小相移网络。



4.6 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

■ 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

引言

- 拉普拉斯变换是傅里叶变换的一种推广，信号的拉普拉斯变换存在时，其傅里叶变换不一定存在。
- 目标：根据信号的拉普拉斯变换求傅里叶变换，并分析需要满足的条件。
- 从实用角度考虑，仅讨论信号为因果信号时的情形，其拉普拉斯变换的收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_0$ ，因此 $F(s)$ 与 $F(j\omega)$ 的关系与收敛边界 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 有关。

■ 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

$\sigma_0 > 0$ 此时收敛边界位于 s 平面的右半平面

此时虚轴 $s = j\omega$ 不在收敛域内，因此在 $s = j\omega$ 处 $F(s)$ 不收敛，故傅里叶变换不存在。

$$f(t) = e^{2t} \varepsilon(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s-2}, \operatorname{Re}[s] > 2, F(j\omega) \text{ 不存在}$$

$\sigma_0 < 0$ 此时收敛边界位于 s 平面的左半平面

此时虚轴 $s = j\omega$ 在收敛域内，因此在 $s = j\omega$ 处 $F(s)$ 收敛，故傅里叶变换存在，为： $F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ ，即直接在象函数 $F(s)$ 中取虚轴。

$$f(t) = e^{-2t} \varepsilon(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}[s] > -2, F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+2}$$

■ 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

$\sigma_0 = 0$ 此时收敛边界位于虚轴，即在虚轴上有极点

此时虚轴 $s = j\omega$ 不在收敛域内，因此在 $s = j\omega$ 处 $F(s)$ 不收敛，但是傅里叶变换存在，只是不能简单的取虚轴了，此时傅里叶变换将**包含冲激函数**。

➤ 当虚轴上仅有单极点时，有关系式：

$$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{i=1}^n k_i \delta(\omega - \omega_i)$$

其中 ω_i 为 $F(s)$ 在虚轴上的极点， k_i 为 $F(s)$ 部分分式展开式中对应于这些极点的部分分式的系数。

➤ 当虚轴上有重极点时，傅里叶变换会出现冲激函数的各阶导数项，这里不再赘述。

例题38 求下列信号的傅里叶变换。

1) $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \beta t \varepsilon(t), \alpha > 0$ 2) $f(t) = \varepsilon(t)$ 3) $f(t) = \cos \beta t \varepsilon(t)$

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

信号与系统

第5章 离散时间信号与系统的时域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第5章 离散时间信号与系统的时域分析

5.1 系统差分方程的经典解

5.2 零输入响应与零状态响应

5.3 单位序列响应与单位阶跃响应

5.4 卷积和

5.1 系统差分方程的经典解

差分方程的基本概念

差分方程的经典解

■ 差分方程的基本概念

对于单输入单输出的LTI离散系统来说，描述其输入-输出关系的数学模型是 n 阶常系数线性差分方程，本课程采用**后向差分方程**，其一般形式为：

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \cdots + a_0y(k-n) = b_me(k) + \cdots + b_0e(k-m) \quad n \geq m$$

$n \geq m$ 是为了保证系统响应在激励瞬间或者之后产生，保证因果性。

方程/系统阶数： 指未知变量最高序号与最低序号的差。

➤ **初始条件：** n 阶系统在 $k = 0$ 时接入激励后的响应值。

$y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$ 激励接入后

➤ **初始状态：** n 阶系统在激励尚未接入前的响应值。

$y(-1), y(-2), \cdots, y(-n)$ 激励接入前

■ 差分方程的经典解

齐次解 $y_h(k)$

- 差分方程右侧为零时称为齐次方程，即 $\sum_{i=0}^n a_{n-i}y(k-i)=0$ 。
- 齐次解指齐次方程的解，只由系统的特征根决定。

n 阶差分方程的齐次解

$$y(k) + a_{n-1}y(k-1) + \cdots + a_0y(k-n) = 0$$



特征方程

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

- 特征根均为单根： $y_h(k) = C_1(\lambda_1)^k + C_2(\lambda_2)^k + \cdots + C_n(\lambda_n)^k$
- 特征根含 r 重根 λ_1 ： r 重根对应 $(C_1k^{r-1} + C_2k^{r-2} + \cdots + C_{r-1}k + C_r)(\lambda_1)^k$
- 特征根含共轭复根 $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm j\Omega}$ ：共轭复根对应的解为

$$[C_1 \cos(\Omega k) + C_2 \sin(\Omega k)]\rho^k \text{ 或 } A\rho^k \cos(\Omega k - \theta), Ae^{j\theta} = C_1 + jC_2$$

■ 差分方程的经典解

特解 $y_p(k)$ 特解的形式与激励的函数形式有关。

下表给出几种典型激励信号对应的特解形式。

激励信号 $e(k)$	特解 $y_p(k)$
E (常数)	P (常数) (所有特征根不为 1)
k^m	$P_m k^m + P_{m-1} k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0$ (所有特征根不为 1) $k^r [P_m k^m + P_{m-1} k^{m-1} + \cdots + P_1 k + P_0]$ (有 r 个为 1 的特征根)
a^k	Pa^k (a 不等于特征根) $(P_1 k + P_0)a^k$ (a 等于一个特征根) $(P_r k^r + P_{r-1} k^{r-1} + \cdots + P_1 k + P_0)a^k$ (a 等于 r 重特征根)
$\cos(\beta k), \sin(\beta k)$	$P_1 \cos(\beta k) + P_2 \sin(\beta k)$ 或 $A \cos(\beta k - \theta), Ae^{j\theta} = P_1 + jP_2$

根据激励的形式选定含待定系数的特解，将特解和激励代入原差分方程中，比较方程两端的系数可确定待定系数大小。

激励在 $k=0$ 时刻加入系统，故特解存在区间为 $k \geq 0$ 。

■ 差分方程的经典解

全解 $y(k)$

- 将特解与齐次解相加就得到全解。
- 此时齐次解中尚含待定系数 C_i ， n 阶差分方程需利用 n 个初始条件 $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ 确定之。

经典解法流程图

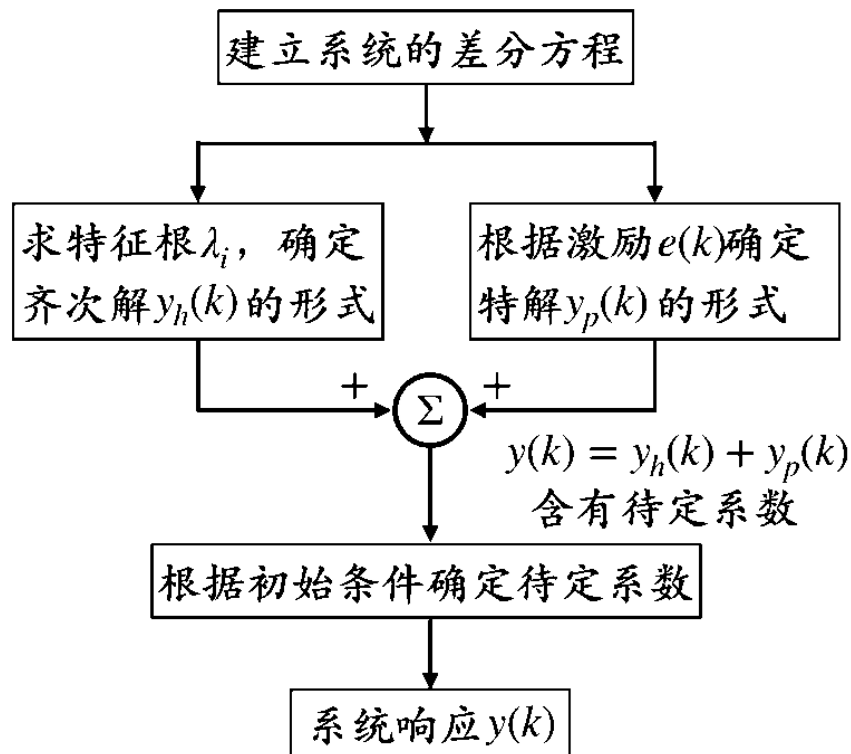
$$y(k) = \underline{y_h(k)} + \underline{y_p(k)}$$

齐次解

特解

自由响应

强迫响应



例题1

某LTI离散系统的差分方程为 $y(k) + 4y(k-1) + 4y(k-2) = e(k)$

当 $e(k) = 2^k \varepsilon(k)$, $y(0) = 0, y(1) = -1$ 时, 求解系统全响应。

■ 差分方程的经典解

补充说明

- 若题目给定的是系统差分方程和初始状态，则初始条件可通过差分方程的迭代求得。

例如：差分方程 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k)$ ，激励 $e(k) = \varepsilon(k)$

初始状态 $y(-1) = 2, y(-2) = -1/2$ ，求初始条件 $y(0), y(1)$ 。

$$y(k) = y(k-1) + 2y(k-2) + e(k)$$

则初始条件：
$$\begin{cases} y(0) = y(-1) + 2y(-2) + e(0) = 2 + 2 \times (-1/2) + 1 = 2 \\ y(1) = y(0) + 2y(-1) + e(1) = 2 + 2 \times 2 + 1 = 7 \end{cases}$$

5.2 零输入响应与零状态响应

零输入响应

零状态响应

系统全响应

求解思路总结

■ 零输入响应 zero input

零输入响应 $y_{zi}(k)$

- 零输入响应指的是在激励为零时，仅由初始状态引起的响应。
- 由于激励为零，因此 $y_{zi}(k)$ 对应齐次方程 $\sum_{i=0}^n a_{n-i} y(k-i) = 0$ 。
- 零输入响应由特征根决定，形式为齐次解。当特征根均为单实根时，零输入响应的形式为

$$y_{zi}(k) = \sum_{i=1}^n C_{xi} \lambda_i^k, k \geq 0$$

- 确定待定系数 C_{xi} ：由初始状态 $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ 直接确定，也可以利用齐次方程迭代求得零输入初始条件 $y_{zi}(0), y_{zi}(1), \dots, y_{zi}(n-1)$ ，两种方法等价。

■ 零状态响应 zero state

零状态响应 $y_{zs}(k)$

- 零状态响应指的是在初始状态为零时，仅由激励引起的响应。
- 此时 $y_{zs}(k)$ 对应非齐次方程 $\sum_{i=0}^n a_{n-i} y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_{m-j} e(k-j) \quad n \geq m$
- 零状态响应包含相应的齐次解和特解两部分。当特征根均为单实根时，零状态响应的形式为

$$y_{zs}(k) = \sum_{i=1}^n C_{si} \lambda_i^k + y_p(k) \quad k \geq 0$$

- 确定待定系数 C_{si} : 由零状态初始条件 $y_{zs}(0), y_{zs}(1), \dots, y_{zs}(n-1)$ 确定。

在 $y_{zs}(-1) = y_{zs}(-2) = \dots = y_{zs}(-n) = 0$ 时，通过差分方程的迭代求得。

■ 全响应

全响应 $y(k)$ $y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$

$$y(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k}_{\text{齐次解 (自由响应)}} + \underbrace{y_p(k)}_{\text{特解 (强迫响应)}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{xi} \lambda_i^k}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{si} \lambda_i^k + y_p(k)}_{\text{零状态响应}}$$

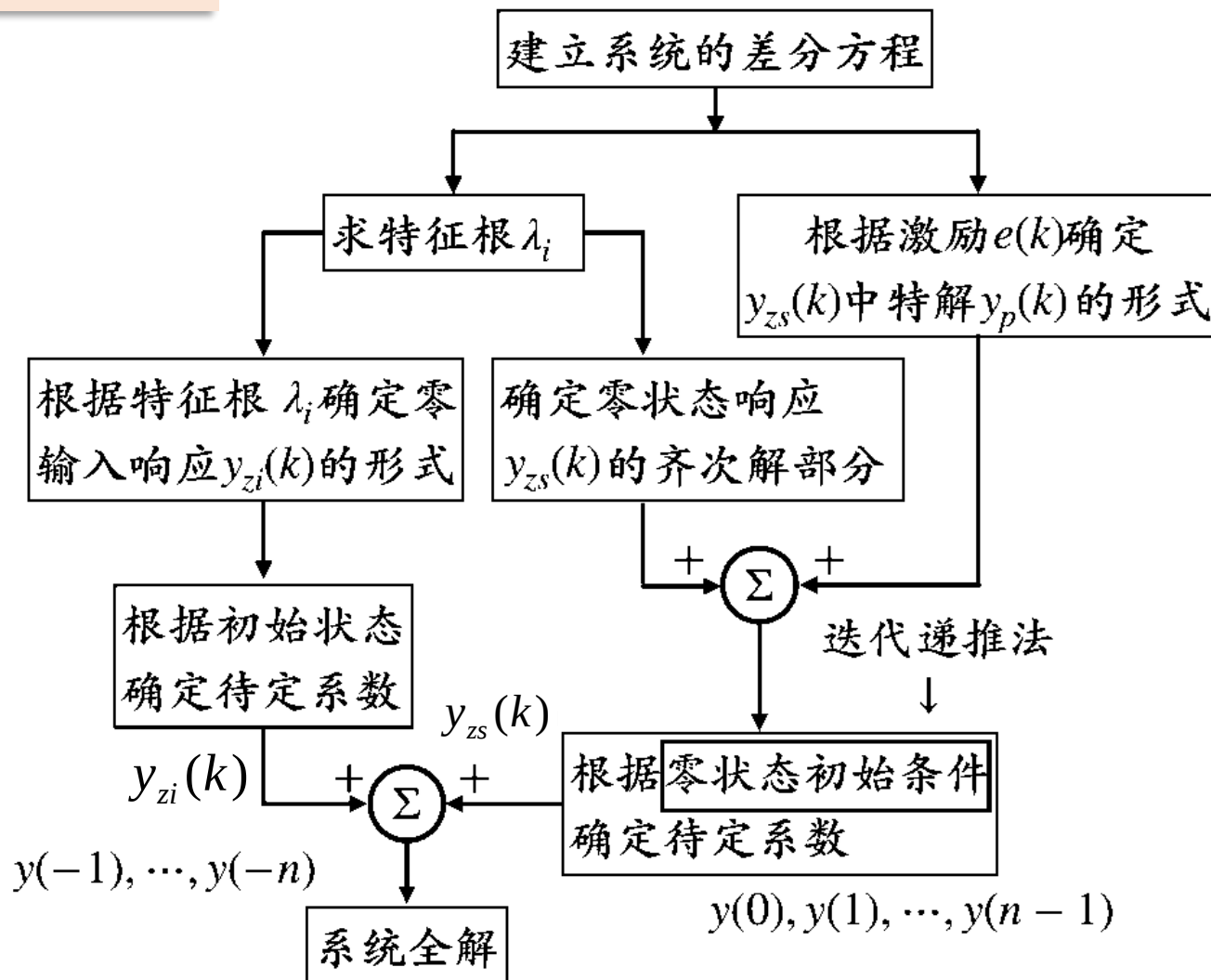
齐次解 (自由响应) 特解 (强迫响应)

齐次解 特解 零输入响应 零状态响应
(自由响应) (强迫响应)

- 辨析：待定系数 C_{xi} , C_{si} 与齐次解待定系数 C_i 的区别。
- 零输入响应包含一部分齐次解，零状态响应包含另一部分齐次解以及特解，待定系数满足 $C_i = C_{xi} + C_{si}$ 。

■ 求解思路总结

时域分析流程图



例题2

某LTI离散系统差分方程为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k)$ ，初始状态 $y(-1) = 2, y(-2) = -1/2$ ，激励 $e(k) = \varepsilon(k)$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$ ，零状态响应 $y_{zs}(k)$ 与全响应 $y(k)$ 。

例题3

将例2中的方程改为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = 2\varepsilon(k-2)$ ，初始状态仍为 $y(-1) = 2$, $y(-2) = -1/2$ ，求此时系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$ ，零状态响应 $y_{zs}(k)$ 与全响应 $y(k)$ 。

$$\text{上例: } \begin{cases} y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = \varepsilon(k) \\ y(-1) = 2, \quad y(-2) = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{zi0}(k) = [-(-1)^k + 2(2)^k] \varepsilon(k) \\ y_{zs0}(k) = \left[\frac{1}{6}(-1)^k + \frac{4}{3}(2)^k - \frac{1}{2} \right] \varepsilon(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = 2\varepsilon(k-2) \\ y(-1) = 2, \quad y(-2) = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{zi}(k) = y_{zi0}(k) \\ y_{zs}(k) = 2y_{zs0}(k-2) \end{cases}$$

$$y_{zi}(k) = [-(-1)^k + 2(2)^k] \varepsilon(k)$$

$$y_{zs}(k) = 2 \left[\frac{1}{6}(-1)^{k-2} + \frac{4}{3}(2)^{k-2} - \frac{1}{2} \right] \varepsilon(k-2) = \left[\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k - 1 \right] \varepsilon(k-2)$$

例题3

将例2中的方程改为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = 2\varepsilon(k-2)$ ，初始状态仍为 $y(-1) = 2$, $y(-2) = -1/2$ ，求此时系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$ ，零状态响应 $y_{zs}(k)$ 与全响应 $y(k)$ 。

$$y_{zi}(k) = \left[-(-1)^k + 2(2)^k \right] \varepsilon(k)$$

$$\begin{cases} f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k) \\ f(k)\delta(k-k_0) = f(k_0)\delta(k-k_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{zs}(k) &= \left[\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k - 1 \right] \varepsilon(k-2) = \left[\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k - 1 \right] [\varepsilon(k) - \delta(k) - \delta(k-1)] \\ &= \left[\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k - 1 \right] \varepsilon(k) \quad y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) = \left[-\frac{2}{3}(-1)^k + \frac{8}{3}(2)^k - 1 \right] \varepsilon(k) \end{aligned}$$

➤ **评注：**若方程右侧存在激励的移位与线性组合，可利用线性时不变性质求解零状态响应。此外，由于激励在 $k = 2$ 时刻接入，则 $y(0)$ ， $y(1)$ 也可视为初始状态，此时 $y_{zs}(k)$ 满足 $y_{zs}(0) = y_{zs}(1) = 0$ 。

5.3 单位序列响应与单位阶跃响应

单位序列响应

单位阶跃响应

$h(k)$ 与 $g(k)$ 的关系

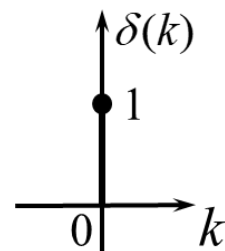
■ 单位序列响应 $h(k)$

单位序列响应的定义



激励为单位序列 $\delta(k)$ 时，LTI系统的零状态响应称为单位序列响应，记为 $h(k)$ ，也称单位样值响应/单位脉冲响应。

$$h(k) \triangleq T \left[\{x(0) = 0\}, \{e(k) = \delta(k)\} \right]$$



单位序列响应的求解

- 方程右侧**仅有 $\delta(k)$** ：当 $k > 0$ 时，方程右侧为 0，特解为 0。

设特征根均为单根，则： $h(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + \cdots + C_n \lambda_n^k$, $k \geq 0$ **齐次解**

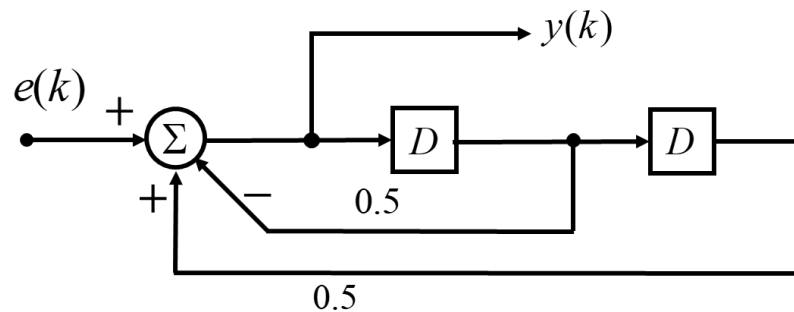
- 确定待定系数 C_i ：由**零状态初始条件** $h(0), h(1), \dots, h(n-1)$ 确定。

在 $h(-1) = h(-2) = \cdots = h(-n) = 0$ 时，通过**差分方程的迭代**求得。

- 方程右侧是 **$\delta(k)$ 及其移位的线性组合**：可利用LTI性质求解。

例题4

已知某LTI离散系统的系统框图如图，试求单位序列响应 $h(k)$ 。



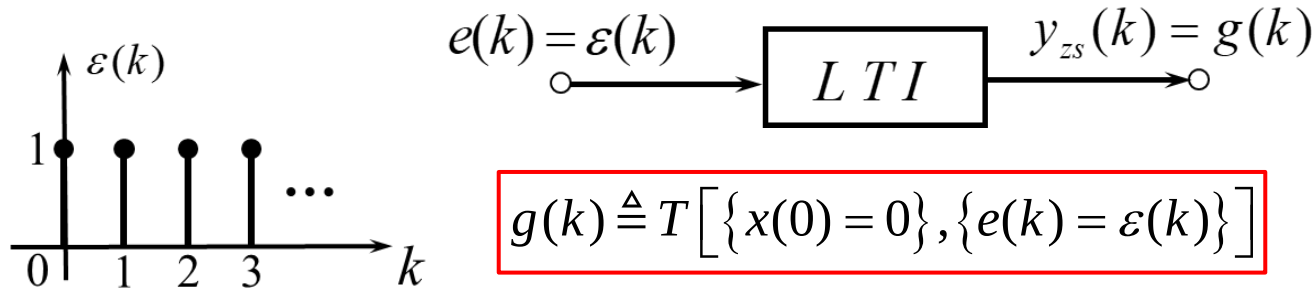
例题5

某离散系统的差分方程为 $y(k) + 5y(k-1) + 6y(k-2) = e(k) - 3e(k-2)$
试求系统的单位序列响应 $h(k)$ 。

■ 单位阶跃响应 $g(k)$

单位阶跃响应的定义

激励为单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$ 时，LTI系统的零状态响应称为单位阶跃响应，记为 $g(k)$ 。



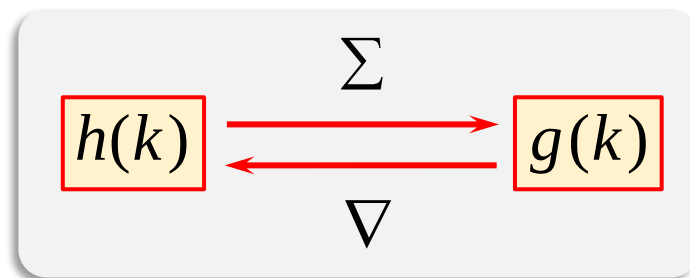
需注意的是，此处对应**非齐次方程**，因此单位阶跃响应可能包含有**特解**，按照分析零状态响应的一般思路去求解就可以。

例题6

某LTI离散系统的差分方程为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k)$ ，试求系统的单位阶跃响应 $g(k)$ 。

■ $h(k)$ 与 $g(k)$ 的关系

$$\begin{array}{ccc} \delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) & \varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i) & \\ \downarrow \text{系统} & \downarrow \text{系统} & \\ h(k) = g(k) - g(k-1) & g(k) = \sum_{i=-\infty}^k h(i) & \end{array}$$



说明

单位序列响应完全由系统差分方程决定，可表征系统特性，可以用 $h(k)$ 和 $g(k)$ 表征系统，并判断系统的因果性、稳定性等特性。

例题7

- 1) 已知某LTI离散系统的单位序列响应为 $h(k) = \left[\frac{1}{3}(-1)^k + \frac{2}{3}(2)^k \right] \varepsilon(k)$,
试求该系统的单位阶跃响应 $g(k)$;
- 2) 已知某LTI离散系统的单位阶跃响应为 $g(k) = 2^k \varepsilon(k)$, 试求该系统的
单位序列响应 $h(k)$ 。

5.4 卷积和

卷积和的定义

卷积和的求解

卷积和的性质

■ 卷积和的定义

卷积积分的定义式

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(n) f_2(k-n)$$

对定义式的说明

- 这个求和式中， n 是为了防止变量混淆而虚设的求和变量
- 卷积和的最终结果是一个新的离散序列，自变量仍然为时间 k
- 卷积和实质上是一个关于移位量 k 的离散时间序列

直观理解：上式对 n 求和，最后剩下的变量是 k 。

■ 卷积和的求解

解析法

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(n) f_2(k-n)$$

变量置换: $f_1(k), k \rightarrow n$ $f_2(k), k \rightarrow k-n$

相乘求和: 求和变量为 n , 结果为关于 k 的序列。

关键: 依据序列的形式确定求和范围, 从而确定卷积和的信号形式

➤ 若 $f_1(k)$ 是因果序列, 即 $f_1(k)=0, k < 0$, $f_2(k)$ 不受限制, 则:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_1(n) f_2(k-n) \quad n \geq 0$$

➤ 若 $f_2(k)$ 是因果序列, 即 $f_2(k)=0, k < 0$, $f_1(k)$ 不受限制, 则:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{n=-\infty}^k f_1(n) f_2(k-n) \quad k-n \geq 0 \Rightarrow n \leq k$$

➤ 若 $f_1(k), f_2(k)$ 均为因果序列, $f_1(k) = f_2(k) = 0, k < 0$, 则:

$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{n=0}^k f_1(n) f_2(k-n) \quad n \geq 0, k-n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq n \leq k$$

例题8 求解下列卷积和。

1) $\varepsilon(k) * \varepsilon(k)$

2) $a^k \varepsilon(k) * b^k \varepsilon(k)$

3) $a^k \varepsilon(k) * \varepsilon(k-4)$

4) $0.5^k \varepsilon(k) * 1$

5) $0.5^k \varepsilon(k) * \varepsilon(1-k)$

注意： 求和区间的确定（ n 的范围），求得卷积和后序列的范围。

■ 卷积和的求解

图解法

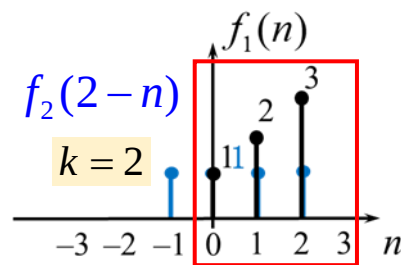
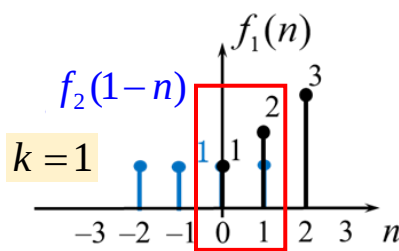
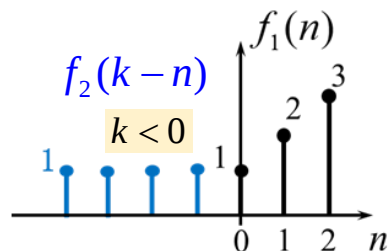
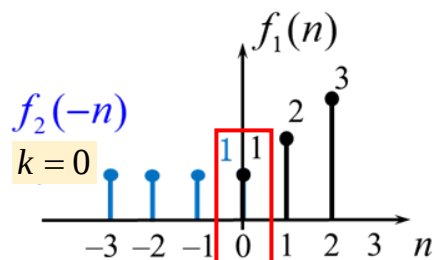
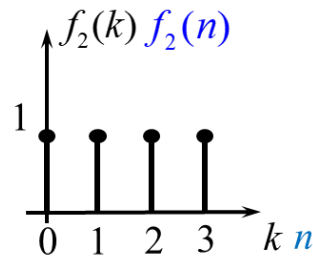
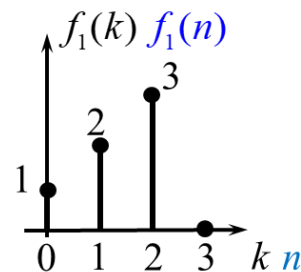
$$f_1(k) * f_2(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(n) f_2(k-n)$$

- **变量置换：** $f_1(k) \rightarrow f_1(n)$, $f_2(k) \rightarrow f_2(n)$ ，作出 $f_1(n)$, $f_2(n)$ 的波形；
- **序列反折：** $f_2(n) \rightarrow f_2(-n)$ ，即作出 $f_2(n)$ 关于纵轴反折后的波形；
- **序列移位：** $f_2(-n) \rightarrow f_2(k-n)$ ，即将 $f_2(-n)$ 沿着 n 轴平移一个 k 值，得到 $f_2(k-n)$ ： $k < 0$ 时左移， $k > 0$ 时右移；
- **序列相乘：** 将移位后的序列 $f_2(k-n)$ 与 $f_1(n)$ 相乘，得到卷积和的求和函数 $f_1(n) f_2(k-n)$ ；
- **进行求和：** 若 $f_1(n)$ 与 $f_2(k-n)$ 序列有重叠，则卷积和为 $f_1(n) f_2(k-n)$ 在重叠区间的求和；若序列波形无重叠，则卷积和为0；
- **时间遍历：** 令 k 在 $(-\infty, +\infty)$ 内变化，重复以上步骤，解出卷积和。

例题9

用图解法求解 $f_1(k) = (k+1)[\varepsilon(k) - \varepsilon(k-3)]$

和 $f_2(k) = [\varepsilon(k) - \varepsilon(k-4)]$ 的卷积和。

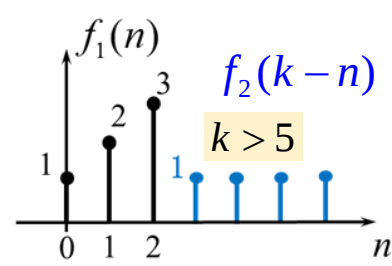
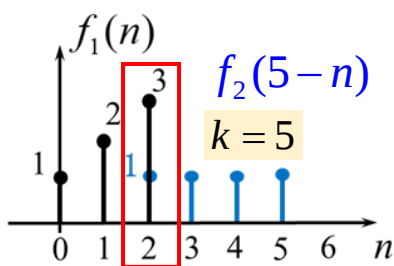
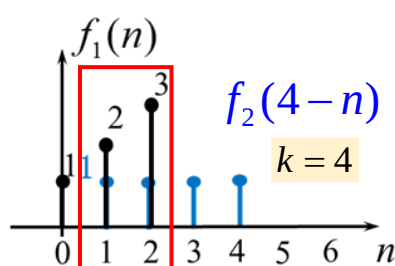
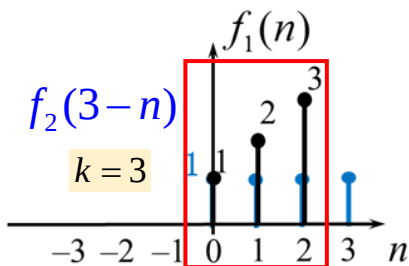


$$f(0) = 1 \times 1 = 1$$

$$f(k < 0) = 0$$

$$f(1) = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$$

$$f(2) = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$$



$$f(3) = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$$

$$f(4) = 1 \times 2 + 1 \times 3 = 5$$

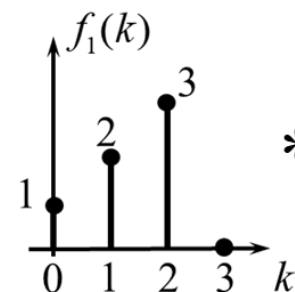
$$f(5) = 1 \times 3 = 3$$

$$f(k > 5) = 0$$

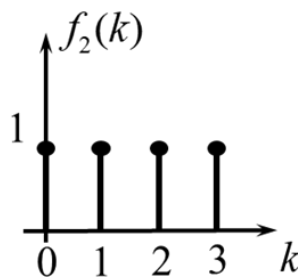
$$\text{解得卷积和 } f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \left\{ \cdots, 0, \underset{k=0}{\uparrow} 1, 3, 6, 6, 5, 3, 0, \cdots \right\}$$

例题9

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \left\{ \cdots, 0, \underset{k=0}{\uparrow} 1, 3, 6, 6, 5, 3, 0, \cdots \right\}$$

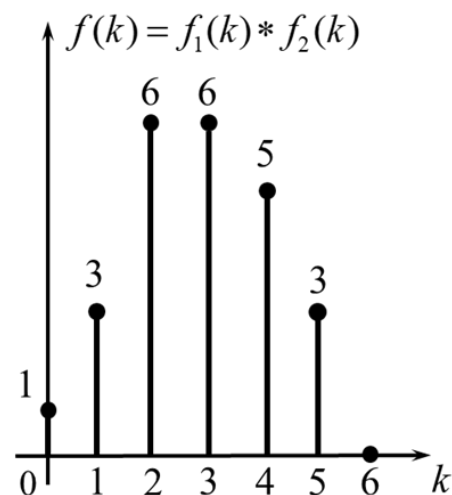


非零长度为3
($k=0 \sim 2$)



非零长度为4
($k=0 \sim 3$)

=

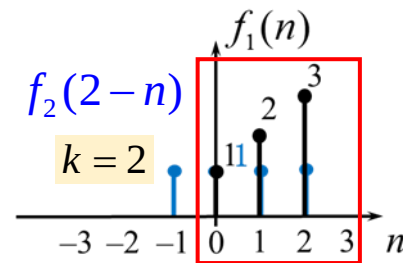


非零长度为6 ($k=0 \sim 5$)

■ 小结：有限长序列卷积和的特点

- 1) $f_1(k)$ 长度为 N_1 ， $f_2(k)$ 长度为 N_2 ，则 $f_1(k) * f_2(k)$ 的长度为 $N = N_1 + N_2 - 1$ ；
- 2) $f_1(k) * f_2(k)$ 的时域范围为两序列的时域范围之和；
- 3) 图解法便于求卷积和在 k 取特定时刻的值，如：

$$f(2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(n) f_2(2-n) = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$$



■ 卷积和的求解

不进位乘法 适用于有限长序列的卷积和

将序列以对位排列的方式代替，然后分别相乘，不进位求和。用口诀总结：“排两行，右对齐，相乘相加不进位，初始位置要注意”。

例题10 已知 $f_1(k) = \{\dots, 0, 3, \underset{k=0}{1}, 4, 2, 0, \dots\}$ ， $f_2(k) = \{\dots, 0, \underset{k=0}{2}, 1, 5, 0, \dots\}$

求卷积和 $f_1(k) * f_2(k)$ 。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & & \overset{k=0}{\downarrow} & \\
 & 3 & 1 & 4 & 2 \\
 & & \underset{k=0}{\uparrow} & & \\
 & & 2 & 1 & 5 \\
 \hline
 & 15 & 5 & 20 & 10 \\
 & 3 & 1 & 4 & 2 \\
 6 & 2 & 8 & 4 & \\
 \hline
 6 & \underset{k=0}{\uparrow} 5 & 24 & 13 & 22 & 10
 \end{array}
 \end{array}$$

验算

→ 相加 10 } × = 80

→ 相加 8 }

→ 相加 80

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \{\dots, 0, 6, \underset{k=0}{5}, 24, 13, 22, 10, 0, \dots\}$$

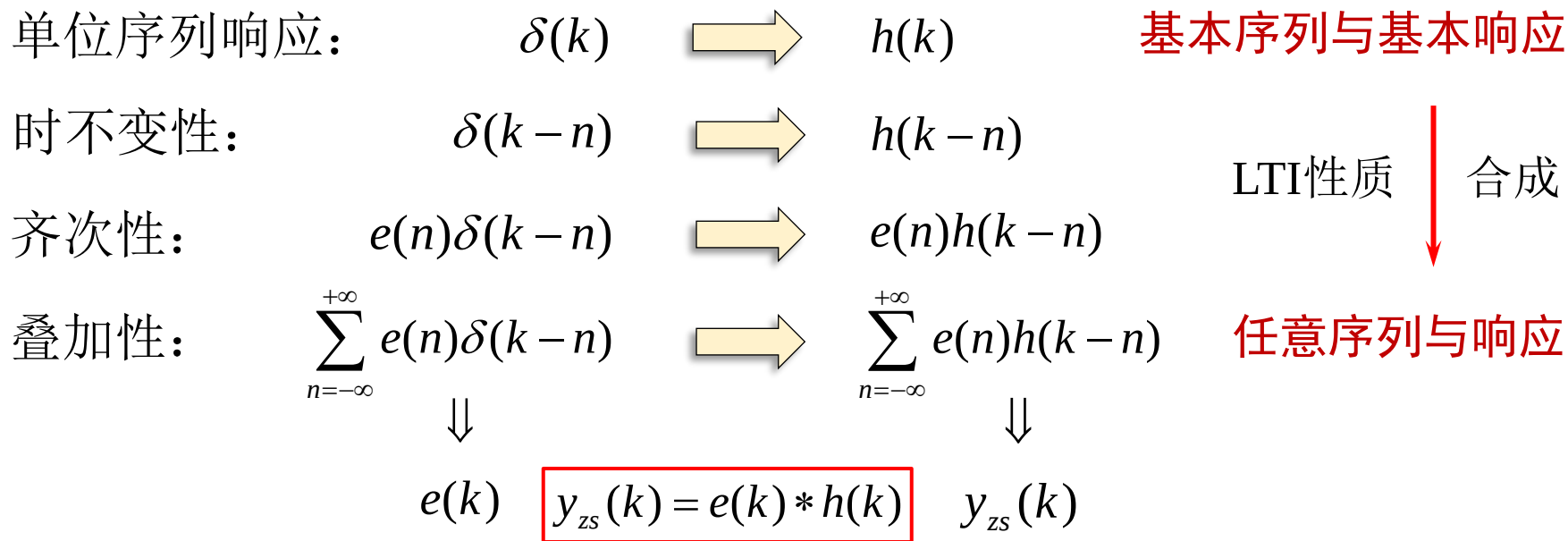
■ 卷积和的性质

➤ 任意序列的分解 $f(k) = f(k) * \delta(k)$

$$f(k) = \cdots + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\delta(k-n)$$

任意序列可以用一系列单位序列及其移位信号的线性组合表示

➤ 借助单位序列响应与卷积和求解系统的零状态响应



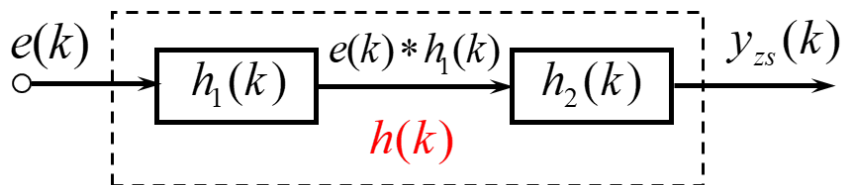
LTI离散系统零状态响应等于激励序列与系统单位序列响应的卷积和。

■ 卷积和的性质

代数性质

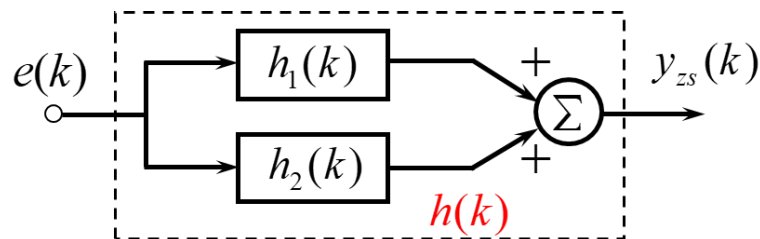
- 交换律 $f_1(k) * f_2(k) = f_2(k) * f_1(k)$
- 分配律 $f_1(k) * [f_2(k) + f_3(k)] = f_1(k) * f_2(k) + f_1(k) * f_3(k)$
- 结合律 $f_1(k) * [f_2(k) * f_3(k)] = [f_1(k) * f_2(k)] * f_3(k)$

复合系统的单位序列响应



$$h(k) = h_1(k) * h_2(k)$$

n 个**级联子系统**的等效单位序列响应为
 n 个子系统**序列响应卷积和**



$$h(k) = h_1(k) + h_2(k)$$

n 个**并联子系统**的等效冲激响应为
 n 个子系统**序列响应之和**

■ 卷积和的性质

移位性质 设 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$

$$f_1(k) * f_2(k - k_1) = f_1(k - k_1) * f_2(k) = f(k - k_1)$$

$$f_1(k - k_1) * f_2(k - k_2) = f_1(k - k_2) * f_2(k - k_1) = f(k - k_1 - k_2)$$

参与卷积和的两个序列，有一个移位，整体就会产生相同的移位

例题11 已知 $f_1(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k+2)$, $f_2(k) = \varepsilon(k-3)$

且 $f(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k) * \varepsilon(k) = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \right] \varepsilon(k)$, 求卷积和 $f_1(k) * f_2(k)$ 。

■ 卷积和的性质

特殊序列的卷积特性

➤ 单位序列的卷积和

$$\begin{cases} f(k) * \delta(k) = \delta(k) * f(k) = f(k) \\ f(k) * \delta(k - k_1) = \delta(k - k_1) * f(k) = f(k - k_1) \end{cases}$$

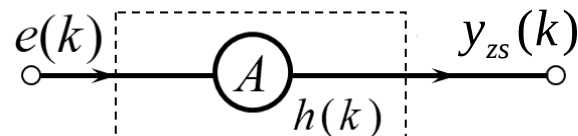
序列卷积单位序列等于其本身，卷积移位的单位序列等于序列本身进行移位：
重现性质。

➤ 阶跃序列的卷积和

$$f(k) * \varepsilon(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \varepsilon(k - n) = \sum_{n=-\infty}^k f(n)$$

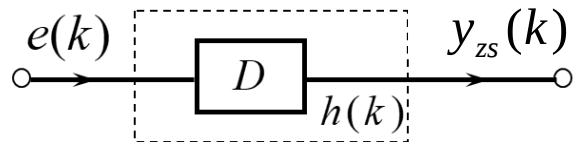
序列与阶跃序列卷积，相当于对序列变上限求和

常用子系统的 $h(k)$



$$h(k) = A\delta(k)$$

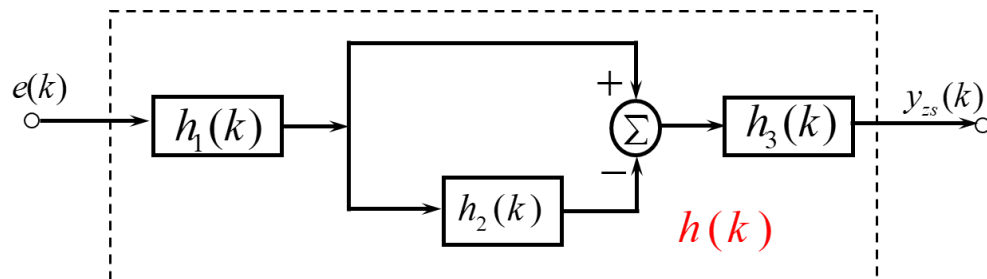
直通通路: $h(k) = \delta(k)$



$$h(k) = \delta(k - 1)$$

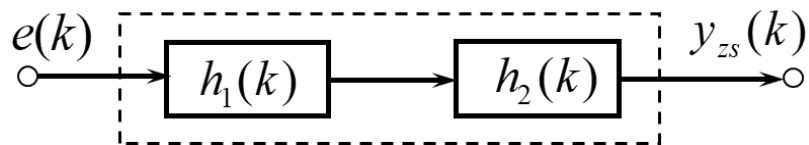
例题12

如图所示系统由几个子系统组合而成，各子系统的单位序列响应分别为 $h_1(k) = \cos \pi k \varepsilon(k)$, $h_2(k) = \delta(k-2)$, $h_3(k) = \delta(k-1)$ ，试求系统总的单位序列响应 $h(k)$ 。



例题13

如图所示系统，子系统的单位序列响应分别为 $h_1(k) = 2 \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)$, $h_2(k) = a^k \varepsilon(k)$, 激励信号 $e(k) = \delta(k) - a\delta(k-1)$, 求零状态响应 $y_{zs}(k)$ 。



信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

信号与系统

第6章 离散时间信号与系统的 z 域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第6章 离散时间信号与系统的 z 域分析

6.1 z 变换

6.2 z 变换的性质

6.3 逆 z 变换

6.4 离散时间系统的 z 域分析

6.5 系统函数与系统特性

6.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系

6.1 z 变换

序列 z 变换的定义

z 变换的收敛域

常见序列的 z 变换

■ 序列 z 变换的定义

从拉普拉斯变换到 z 变换

z 变换的定义可以借助抽样信号的拉普拉斯变换引出

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

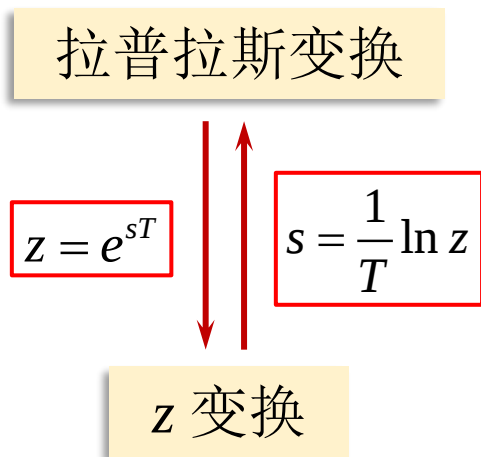
对上式作双边拉普拉斯变换，根据 $\delta(t-kT) \leftrightarrow e^{-kTs}$ ，有：

$$F(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

令 $z = e^{sT}$ ，上式变为复变量 z 的函数：

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)z^{-k}$$

为了分析方便，令 T 为 1： $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$



■ 序列 z 变换的定义

z 变换的定义

z 变换对 $f(k) \leftrightarrow F(z)$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$$

➤ 双边 z 变换

➤ 单边 z 变换

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

拉普拉斯变换中着重讨论单边的因果情形；分析离散系统，对单、双边 z 变换都进行讨论。因果信号的单、双边 z 变换相等。

z 变换存在的充要条件

➤ 绝对可和条件

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$$

序列的 z 变换是关于复变量 z 的幂级数，满足绝对可和条件时，此幂级数收敛。

■ z 变换的收敛域

➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

有限长序列

收敛域至少是 $0 < |z| < \infty$ ，可能会包括 $z = 0, z = \infty$

示例

● $f(k) = \delta(k) \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k)z^{-k} = 1$

z 变换是与 z 无关的常数 1，因而在 z 的全平面收敛，即 $|z| \geq 0$ 。

● $f(k) = \delta(k - k_0) \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k - k_0)z^{-k} = z^{-k_0} \quad \begin{cases} k_0 > 0 & \text{收敛域: } |z| > 0 \\ k_0 < 0 & \text{收敛域: } |z| < \infty \end{cases}$

● $f(k) = \left\{ 1, 2, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{3}, 2, 1 \right\} \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k} = z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)z^{-k}| = \underbrace{|z^2| + |2z| + 3}_{|z| < \infty} + \underbrace{|2z^{-1}| + |z^{-2}|}_{|z| > 0} < \infty \quad \text{收敛域: } 0 < |z| < \infty$$

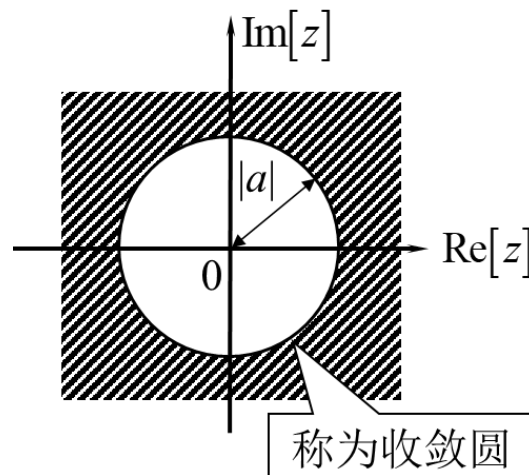
■ z 变换的收敛域

➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(z)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

因果序列

$$|z| > |a|$$

z 平面上为半径为 $|a|$ 的圆外区域



示例 $f(k) = a^k \varepsilon(k)$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

收敛条件： $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

$$a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, \text{收敛域: } |z| > |a|$$

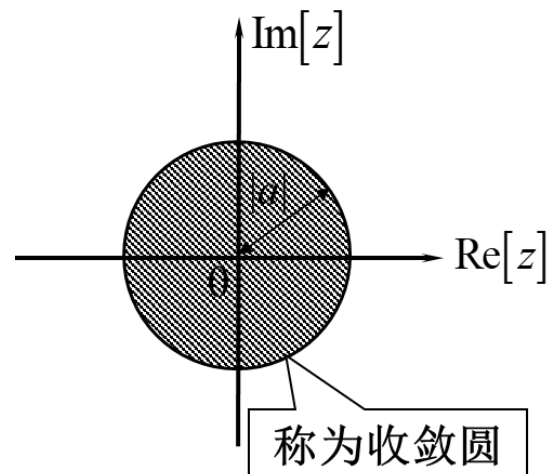
■ z 变换的收敛域

➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(z)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

反因果序列

$$|z| < |a|$$

z 平面上为半径为 $|a|$ 的圆内区域



示例 $f(k) = -a^k \varepsilon(-k-1)$

$$F(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} z^k = -\sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^k = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}$$

收敛条件： $|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$

$$-a^k \varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \text{收敛域: } |z| < |a|$$

■ z 变换的收敛域

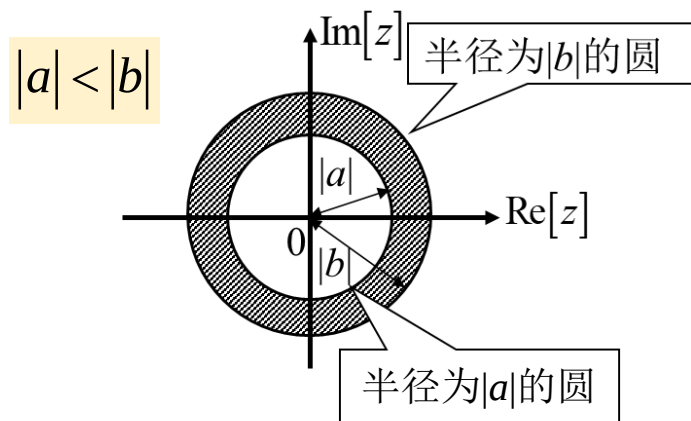
➤ 收敛域：使 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(z)z^{-k}| < \infty$ ，即 $F(z)$ 存在的 z 的取值范围。

$$a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \text{收敛域: } |z| > |a|$$

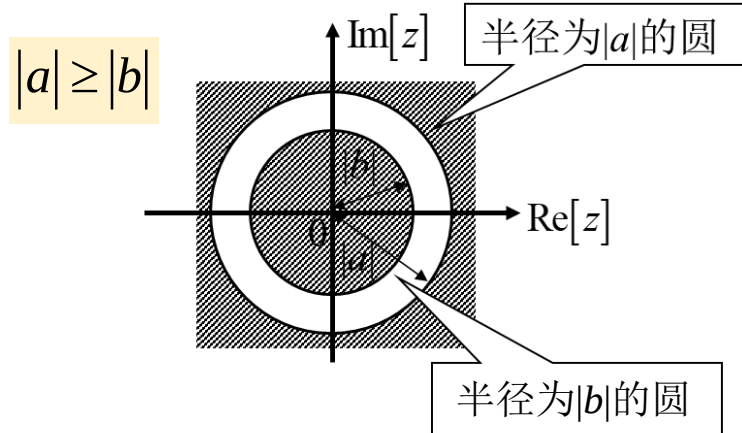
$$-a^k \varepsilon(-k-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \text{收敛域: } |z| < |a|$$

不同信号可能会有相同的象函数，但收敛域不同。

双边序列 $f(k) = \underbrace{b^k \varepsilon(-k-1)}_{|z| < |b|} + \underbrace{a^k \varepsilon(k)}_{|z| > |a|}$ $F(z) = -\frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a}$



收敛域为圆环， z 变换存在



无公共收敛区域， z 变换不存在

■ 常用序列的 z 变换

$$\delta(k) \leftrightarrow 1 \quad |z| \geq 0 \text{ (全平面收敛)} \quad \delta(k - k_0) \leftrightarrow z^{-k_0} \begin{cases} k_0 > 0 & \text{收敛域: } |z| > 0 \\ k_0 < 0 & \text{收敛域: } |z| < \infty \end{cases}$$

$$a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \quad \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - 1} \quad |z| > 1$$

$$b^k \varepsilon(-k - 1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - b}, |z| < |b| \quad \varepsilon(-k - 1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - 1} \quad |z| < 1$$

$$e^{\pm j\beta k} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{\pm j\beta}}, |z| > |e^{\pm j\beta}| = 1$$

$$\cos \omega_0 k \varepsilon(k) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 k} + e^{-j\omega_0 k}] \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) = \frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

$$\sin \omega_0 k \varepsilon(k) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 k} - e^{-j\omega_0 k}] \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) = \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

6.2 z 变换的性质

线性性质

z 域微分性质

移位性质

z 域积分性质

尺度变换性质

初值定理

k 域反转

终值定理

序列卷积性质

序列求和性质

■ 线性性质

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), \alpha_1 < |z| < \beta_1 \quad f_2(k) \leftrightarrow F_2(z), \alpha_2 < |z| < \beta_2$$

$$af_1(k) + bf_2(k) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z) \quad \max(\alpha_1, \alpha_2) < |z| < \min(\beta_1, \beta_2)$$

收敛域至少是两个序列 z 变换收敛域的相交部分。

例题1 求信号 $f(k) = 2^k \varepsilon(-k-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k)$ 的 z 变换 $F(z)$ 。

在某些特殊情况下，如零极点在线性运算后抵消，两个无限长序列作减法变成有限长序列，等等，收敛域反而可能会扩大。

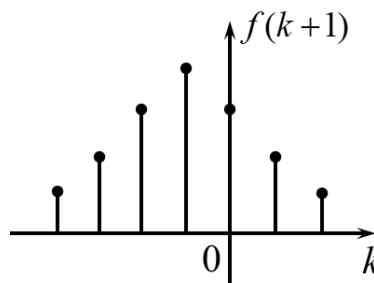
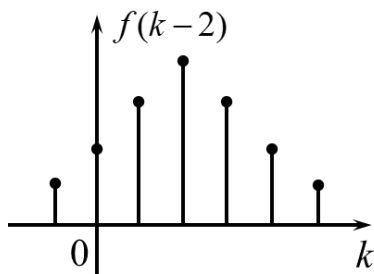
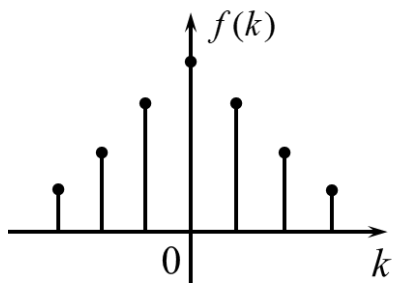
$$\text{如: } \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1 \quad \delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} z^{-1} = 1 \quad |z| \geq 0$$

■ 移位性质

双边 z 变换的移位性质 移位后的序列不丢失原序列信息。

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta, \text{ 且有整数 } m > 0$$

则 $f(k \pm m) \leftrightarrow z^{\pm m} F(z)$, 收敛域至少为 $\alpha < |z| < \beta$



例题2 求信号 $f(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k-4)$ 的 z 变换。

■ 移位性质

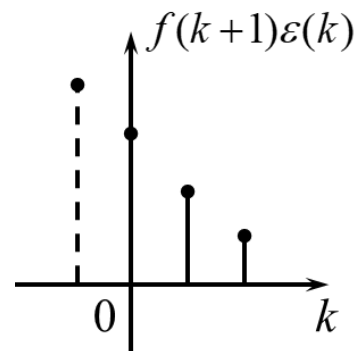
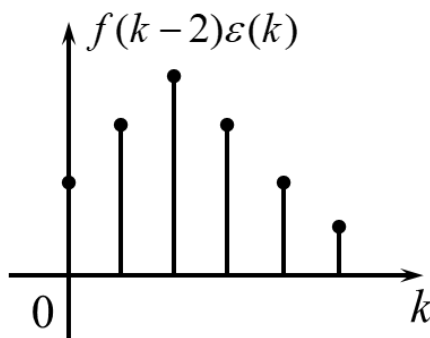
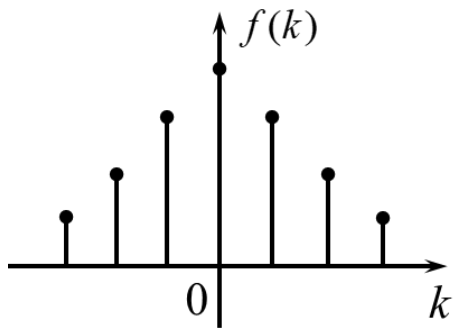
单边 z 变换的移位性质 移位后的序列与原序列相比长度发生了增减。

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z), |z| > \alpha, \text{ 且有整数 } m > 0$$

$$\begin{cases} f(k-m)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-m}F(z) + \sum_{k=0}^{m-1} f(k-m)z^{-k}, |z| > \alpha \\ f(k+m)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right], |z| > \alpha \end{cases}$$

特殊地，对于**因果序列右移**，其单边 z 变换为：

$$f(k-m) = f(k-m)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-m}F(z)$$



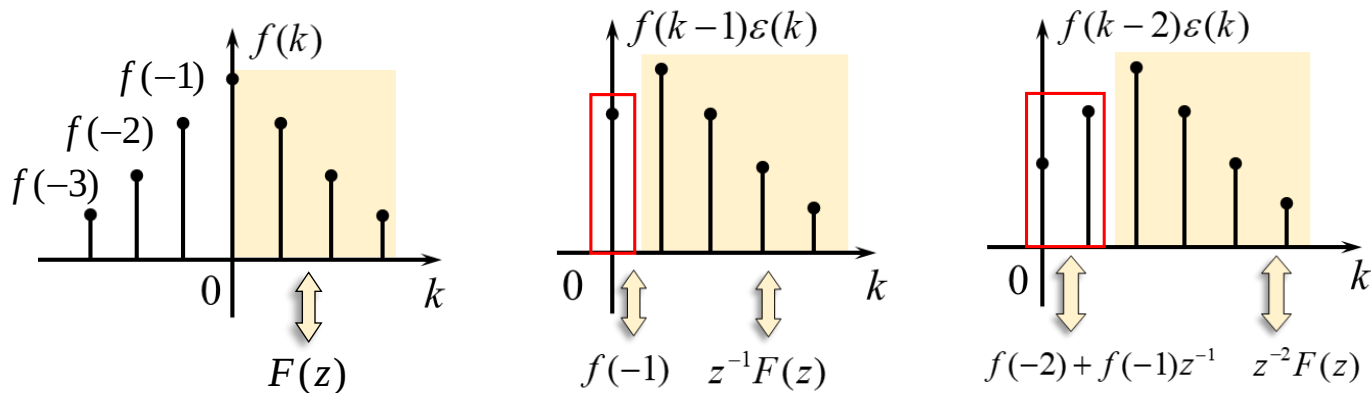
■ 移位性质

单边 z 变换的移位性质

需要记忆的是左移、右移1-2个单位的性质公式

右移性质：

$$\begin{cases} f(k-1)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-1}F(z) + \underline{f(-1)} \\ f(k-2)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^{-2}F(z) + \underline{f(-2) + f(-1)z^{-1}} \end{cases}$$



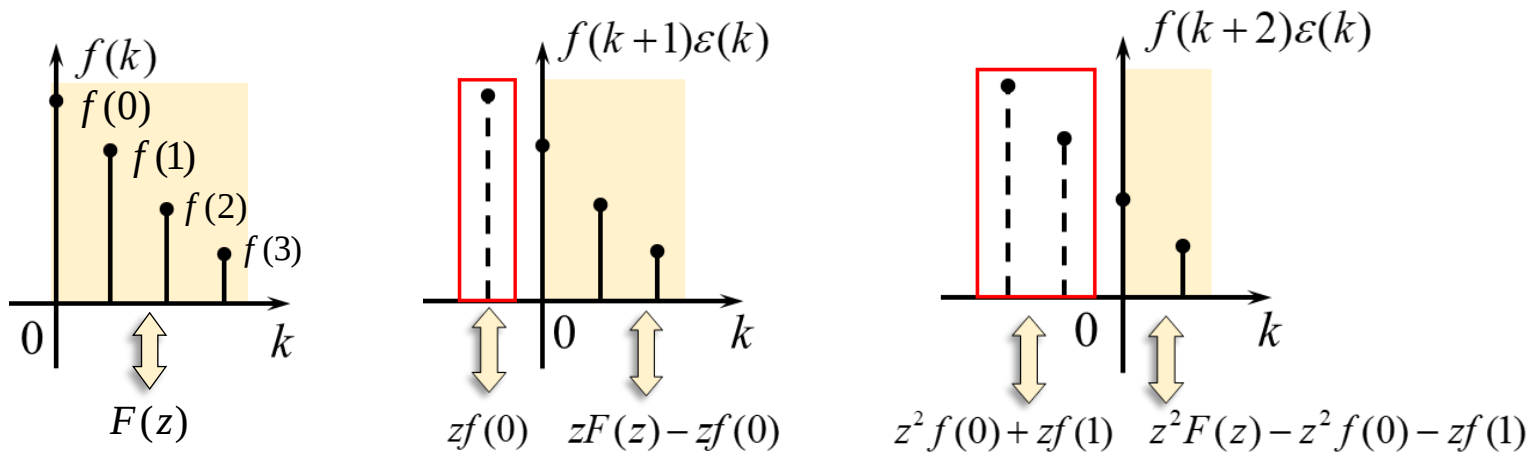
在差分方程中运用移位性质，会引入系统初始状态 $y(-1), y(-2), \dots$ ，便于在 z 域求解差分方程的解。

■ 移位性质

单边 z 变换的移位性质

需要记忆的是左移、右移1-2个单位的性质公式

左移性质:
$$\begin{cases} f(k+1)\varepsilon(k) \leftrightarrow zF(z) - \underline{zf(0)} = z[F(z) - f(0)] \\ f(k+2)\varepsilon(k) \leftrightarrow z^2F(z) - \underline{z^2f(0) - zf(1)} = z^2[F(z) - f(0) - z^{-1}f(1)] \end{cases}$$



例题3 求信号 a^{k-2} 和 a^{k+2} 的单边 z 变换。

■ 移位性质

因果周期序列的 z 变换

设因果周期序列 $f_N(k)$ 第一个周期内的序列为 $f_0(k)$ ，序列周期为 N

$$f_N(k)\varepsilon(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_0(k-mN) = f_0(k) + f_0(k-N) + f_0(k-2N) + \cdots$$

$$F(z) = F_0(z) + F_0(z)z^{-N} + F_0(z)z^{-2N} + \cdots = F_0(z) \cdot (1 + z^{-N} + z^{-2N} + \cdots)$$

$$= \frac{F_0(z)}{1 - z^{-N}}, \quad |z^{-N}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

$$f_N(k)\varepsilon(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_0(k-mN) \leftrightarrow \frac{F_0(z)}{1 - z^{-N}}, \quad |z| > 1$$

回顾连续单边周期信号：

$$f_T(t)\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t-nT) \leftrightarrow \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0$$

例题4 求如下周期为 N 的有始周期性单位序列的 z 变换。

$$\delta_N(k)\varepsilon(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(k - mN)$$

■ 尺度变换性质

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta \quad \left\{ \begin{array}{l} b^k f(k) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{b}\right), \quad \alpha|b| < |z| < \beta|b| \\ b^{-k} f(k) \leftrightarrow F(bz), \quad \frac{\alpha}{|b|} < |z| < \frac{\beta}{|b|} \\ (-1)^k f(k) \leftrightarrow F(-z), \quad \alpha < |z| < \beta \end{array} \right.$$

例题5 求 $f(k) = b^k \cos \beta k \varepsilon(k)$ 的 z 变换。

■ **k 域反转** 仅适用于双边 z 变换

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

$$f(-k) \leftrightarrow F(z^{-1}), \quad \frac{1}{\beta} < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

例题6 求 $a^{-k}\varepsilon(-k-1)$ 的双边 z 变换。

■ 序列卷积性质

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z), \alpha_1 < |z| < \beta_1 \quad f_2(k) \leftrightarrow F_2(z), \alpha_2 < |z| < \beta_2$$

$$f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z) \cdot F_2(z)$$

收敛域：至少为 $F_1(z), F_2(z)$ 两个象函数收敛域的公共部分

$$\text{LTI系统: } y_{zs}(k) = e(k) * h(k) \leftrightarrow Y_{zs}(z) = E(z) \cdot H(z)$$

需注意：在象函数相乘的过程中，如果出现零极点抵消的情况，收敛域则可能会扩大。

例题7

求 $f(k) = a^k \varepsilon(k) * b^k \varepsilon(k)$ 的 z 变换（其中 $0 < a < b$ ）。

例题8

已知 $f_1(k) = \varepsilon(k)$ ， $f_2(k) = \delta(k+1) - \delta(k)$ ，试求 $f_1(k) * f_2(k)$ 的 z 变换。

■ z 域微分性质

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta \quad \begin{cases} kf(k) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z), & \alpha < |z| < \beta \\ k^2 f(k) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left(-z \frac{d}{dz} F(z) \right), & \alpha < |z| < \beta \\ k^m f(k) \leftrightarrow \left(-z \frac{d}{dz} \right)^m F(z), & \alpha < |z| < \beta \end{cases}$$

其中 $\left(-z \frac{d}{dz} \right)^m$ 表示进行 m 次求导后乘以 $-z$ 的运算。

例题9 求 $f(k) = k\varepsilon(k)$ 的 z 变换。

$$k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

$$ka^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

$$ka^{k-1} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

■ z 域积分性质

$f(k) \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$ 设有整数 m , 且 $k+m > 0$, 则:

$$\frac{f(k)}{k+m} \leftrightarrow z^m \int_z^\infty \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta \quad \alpha < |z| < \beta$$

特殊地, 若 $m=0$, $k > 0$, 则: $\frac{f(k)}{k} \leftrightarrow \int_z^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} d\eta \quad \alpha < |z| < \beta$

例题10 求 $f(k) = \frac{1}{k+1} \varepsilon(k)$ 的 z 变换。

■ 初值定理与终值定理

该性质适用于右边序列或有始序列，此时假设 $f(k)$ 为因果序列。

初值定理 由 $F(z)$ 直接求 $f(0), f(1), f(2), \dots$

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z), |z| > |a| \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \\ f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[F(z) - f(0)] \\ f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}] \\ \dots \end{array} \right.$$

例题11 某因果序列的 z 变换为 $F(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-1)}$ ，求 $f(0), f(1)$ 。

■ 初值定理与终值定理

该性质适用于右边序列或有始序列，此时假设 $f(k)$ 为因果序列。

终值定理

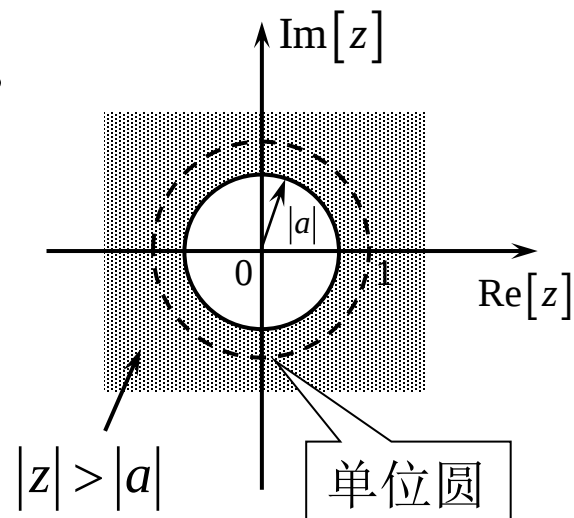
由 $F(z)$ 判断 $f(\infty)$ 是否存在，并求之。

$$f(k)\varepsilon(k) \leftrightarrow F(z), \quad |z| > |a|, \quad 0 \leq |a| < 1$$

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

前提：收敛域包含单位圆时，终值才存在。

对于因果序列， $F(z)$ 除了在 $z=1$ 处可以有一阶极点外（此时该极点可约去），其余极点必须在单位圆 $|z|=1$ 内，才可以应用终值定理。



例题12

已知因果序列 $f(k)$ 的 z 变换如下，问能否应用终值定理？若能，试求序列终值 $f(\infty)$ 。

$$1) F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} \quad 2) F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+2)} \quad 3) F(z) = \frac{z}{(z+1)(z-\frac{1}{2})}$$

■ 序列求和性质

$$f(k) \leftrightarrow F(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

$$g(k) = \sum_{i=-\infty}^k f(i) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z), \quad \max(\alpha, 1) < |z| < \beta$$

例题13 求序列 $\sum_{i=0}^k 2^i$ ($k \geq 0$) 的 z 变换。

6.3 逆 z 变换

部分分式展开法

其它求解方法

■ 逆 z 变换

逆 z 变换的公式（了解）

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz \quad -\infty < k < +\infty$$

上式中 C 为收敛域中的一条环绕原点逆时针旋转的闭合曲线。

三大变换信号分解思想

基本信号

逆 z 变换计算方法

● $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow e^{j\omega t}$ 频域

● $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \Rightarrow e^{st}$ s 域

● $f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(z)}{z} z^k dz \Rightarrow z^k$ z 域

➤ 反演积分法（留数法）

➤ 幂级数展开法（解不闭合）

➤ 部分分式展开法

➤ 用 z 变换性质求逆 z 变换

■ 部分分式展开法

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{\underbrace{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}}_{n \text{ 个极点}}$$

逆 z 变换部分分式展开法与拉式变换完全一致，需要注意两点：

➤ 部分分式展开时，对 $\frac{F(z)}{z}$ 进行展开，然后再乘以 z 。

部分分式	常见变换对
$\frac{1}{z-a}$, $\frac{1}{(z-a)^2}$	$\frac{z}{z-a}$, $\frac{z}{(z-a)^2}$

➤ 求反变换对应的序列时，需要结合象函数收敛域进行分析。

■ 部分分式展开法

$m \leq n$ 时 直接对 $\frac{F(z)}{z}$ 进行展开，然后再乘以 z 。

$m > n$ 时 先通过多项式除法分解出真分式，再进行部分分式展开。

$F(z)$ 仅有单极点

部分分式形式:
$$\frac{F(z)}{z} = \frac{k_0}{z} + \frac{k_1}{z - z_1} + \frac{k_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{k_n}{z - z_n}$$

系数公式:
$$k_i = (z - z_i) \left. \frac{F(z)}{z} \right|_{z=z_i} \quad F(z) = k_0 + \frac{k_1 z}{z - z_1} + \frac{k_2 z}{z - z_2} + \cdots + \frac{k_n z}{z - z_n}$$

所用变换对:

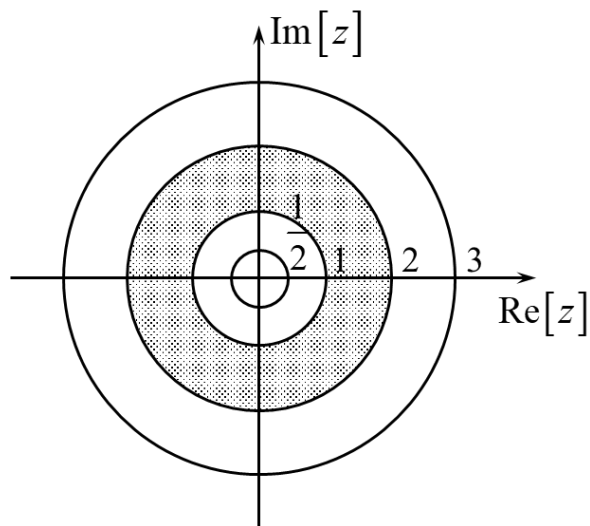
$$\delta(k) \leftrightarrow 1 \quad a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \quad b^k \varepsilon(-k - 1) \leftrightarrow -\frac{z}{z - b}, |z| < |b|$$

例题14 求象函数 $F(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $|z| > 3$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题15 求象函数 $F(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}$ 的原函数 $f(k)$ 。

其中收敛域分别为: 1) $|z| > \frac{1}{2}$, 2) $|z| < \frac{1}{3}$, 3) $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

例题16 求 $F(z) = \frac{-z}{z-1/2} + \frac{2z}{z-1} + \frac{-z}{z-2} + \frac{z}{z-3}$, $1 < |z| < 2$ 的原函数 $f(k)$ 。



■ 部分分式展开法

$F(z)$ 含有共轭单极点 共轭单极点 $z_{1,2} = c \pm jd = \alpha e^{\pm j\beta}$

共轭单极点对应的部分分式形式: $\frac{F(z)}{z} = \frac{k_1}{z - (c + jd)} + \frac{k_2}{z - (c - jd)}$

系数公式:

$$\begin{cases} k_1 = [z - (c + jd)] \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=c+jd} = |k_1| e^{j\varphi} \\ k_2 = [z - (c - jd)] \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=c-jd} = |k_1| e^{-j\varphi} = k_1^* \end{cases}$$

求出其中一个系数

另一系数取共轭即可

$$F(z) = \frac{|k_1| e^{j\varphi} z}{z - \alpha e^{j\beta}} + \frac{|k_1| e^{-j\varphi} z}{z - \alpha e^{-j\beta}} \begin{cases} |z| > \alpha & f(k) = 2|k_1| \alpha^k \cos(\beta k + \varphi) \varepsilon(k) \\ |z| < \alpha & f(k) = -2|k_1| \alpha^k \cos(\beta k + \varphi) \varepsilon(-k-1) \end{cases}$$

例题17 求象函数 $F(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 8}$ 在如下收敛域时的原函数 $f(k)$ 。

1) $|z| > 2\sqrt{2}$ 2) $|z| < 2\sqrt{2}$

■ 部分分式展开法

$F(z)$ 含有 r 重极点

$$F(z) = \frac{B(z)}{\underbrace{(z-a)^r}_{r \text{ 重极点 } z=z_1=a} A_2(z)} = \frac{B(z)}{(z-a)^r (z-z_{r+1}) \cdots (z-z_n)}$$

部分分式形式: $\frac{F(z)}{z} = \left[\frac{k_{11}}{(z-a)^r} + \frac{k_{12}}{(z-a)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{1r}}{(z-a)} \right] + \sum_{j=r+1}^n \frac{k_j}{z-z_j}$

系数公式: $k_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} (z-a)^r \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=a}$

所需变换对: $\left\{ \begin{array}{l} a^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z| > |a| \\ ka^{k-1} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, |z| > |a| \\ \frac{1}{2} k(k-1) a^{k-2} \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^3}, |z| > |a| \\ \dots\dots \end{array} \right.$

推导记忆方法:
两侧**对 a 求导**
即可得到变换式

例题18 求象函数 $F(z) = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)^3}, |z| > 1$ 的原函数 $f(k)$ 。

■ 逆 z 变换的其它求法

当含有共轭极点时，可以尝试通过配凑和待定系数，配出对应的象函数，然后求解反变换。

所用到的变换对为：

$$\cos \omega_0 k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

$$\sin \omega_0 k \varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1$$

此外，也要学会灵活应用性质和定义求解逆 z 变换。

例题19 求象函数 $F(z) = \frac{z}{z^2 - \sqrt{3}z + 1}$, $|z| > 1$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题20 求象函数 $F(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$, $|z| > 1$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题21 求象函数 $F(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)(z - 0.5)}$, $|z| < \frac{1}{2}$ 的原函数 $f(k)$ 。

例题22 求象函数 $F(z) = e^{\frac{2}{z}}, |z| > 0$ 的原函数 $f(k)$ 。

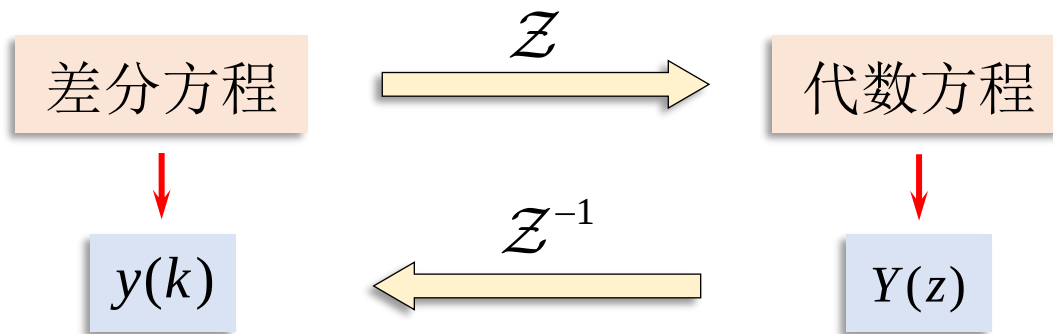
例题23 求象函数 $F(z) = \ln\left(1 + \frac{a}{z}\right)$, $|z| > |a|$ 的原函数 $f(k)$ 。

6.4 离散时间系统的 z 域分析

系统差分方程的变换域解

系统函数与系统的 z 域框图

■ 系统差分方程的 z 域解



以二阶LTI离散系统为例，系统的差分方程为：

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)$$

其中 $e(k)$ 在 $k = 0$ 时刻加入系统，即 $e(-1) = e(-2) = 0$ 。

对方程两端同时取单边 z 变换，根据时移性质，有：

$$Y(z) + a_1 [z^{-1}Y(z) + y(-1)] + a_0 [z^{-2}Y(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}] = (b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})E(z)$$

其中 $y(-1), y(-2)$ 为系统的初始状态。

■ 系统差分方程的 z 域解

$$Y(z) + a_1[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + a_0[z^{-2}Y(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}] = (b_2 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2})E(z)$$

$$(1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2})Y(z) + [a_1y(-1) + a_0y(-2) + a_0y(-1)z^{-1}] = (b_2 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2})E(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{-[a_1y(-1) + a_0y(-2) + a_0y(-1)z^{-1}]}{1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2}}}_{e(k)=0 \Rightarrow Y_{zi}(z)} + \underbrace{\frac{b_2 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2}} E(z)}_{y(-1)=y(-2)=0 \Rightarrow Y_{zs}(z)}$$

与差分方程系数和
系统初始状态有关
与系统激励无关

与差分方程系数和
系统的激励有关
与初始状态无关

$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) \quad \longleftrightarrow \quad y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$$

■ 系统差分方程的 z 域解

$$Y_{zi}(z) = \frac{-[a_1 y(-1) + a_0 y(-2) + a_0 y(-1)z^{-1}]}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad Y_{zs}(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} E(z)$$

系统时域解的形式由全响应 $Y(z)$ 的极点决定。而 $Y(z)$ 的极点由系统特征方程形成的极点，和系统激励信号的极点组成。

$$\text{系统特征方程: } z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow 1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2} = 0$$

{	自由响应/齐次解	由系统特征根决定
	强迫响应/特解	由激励的极点决定
{	零输入响应	由系统特征根决定
	零状态响应	由系统特征根和激励的极点共同决定

例题24

已知系统的差分方程为 $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = e(k) + 2e(k-2)$ ，激励信号为 $e(k) = \varepsilon(k)$ ，系统的初始状态 $y(-1) = 2, y(-2) = -0.5$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$ 、零状态响应 $y_{zs}(k)$ 和全响应 $y(k)$ 。

■ 系统差分方程的 z 域解

补充说明

➤ 若题目所给方程是前向差分方程，则求解方法有两种：

方法1： 利用单边 z 变换的左移性质

$$\begin{cases} y(k+1) \leftrightarrow zY(z) - zy(0) = z[Y(z) - y(0)] \\ y(k+2) \leftrightarrow z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) = z^2[Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)] \end{cases}$$

此时需要利用 $y(0), y(1), \dots$

方法2： 将前向差分方程转换为后向差分方程，用右移性质求解

此时需要利用 $y(-1), y(-2), \dots$

➤ 若题目所给的条件不适用，则须通过差分方程的**迭代递推**得出所需的条件。

■ 系统函数与系统的 z 域框图

系统函数

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)}$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)$$

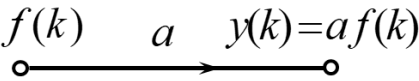
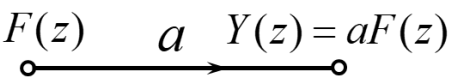
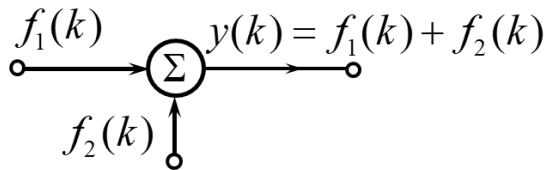
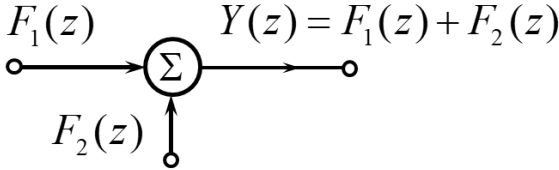
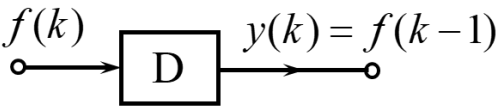
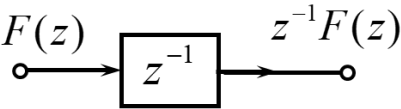
$$Y_{zs}(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} E(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$

系统函数只与差分方程的系数和阶数有关。因此它只与系统的结构、参数有关，而与系统的激励、初始状态等均无关，反映的是系统固有特性。

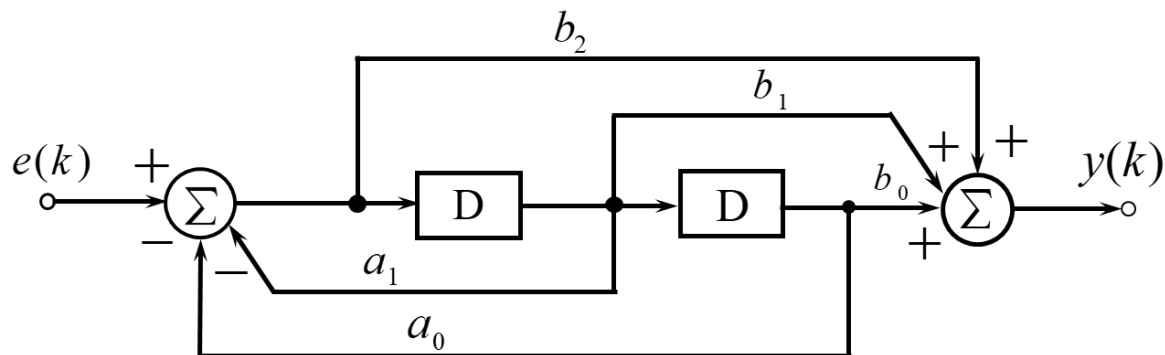
$$Y_{zs}(z) = E(z) \cdot H(z) \leftrightarrow y_{zs}(k) = e(k) * h(k) \quad h(k) \leftrightarrow H(z)$$

■ 系统函数与系统的 z 域框图

系统的 z 域框图

	时域框图	z 域框图
1) 数乘器		
2) 加法器		
3) 延时单元	 $f(k) \leftrightarrow F(z)$ $f(k-1) \leftrightarrow z^{-1}F(z) + f(-1)$	 系统函数与初始状态无关 因此用零状态的 z 域模型

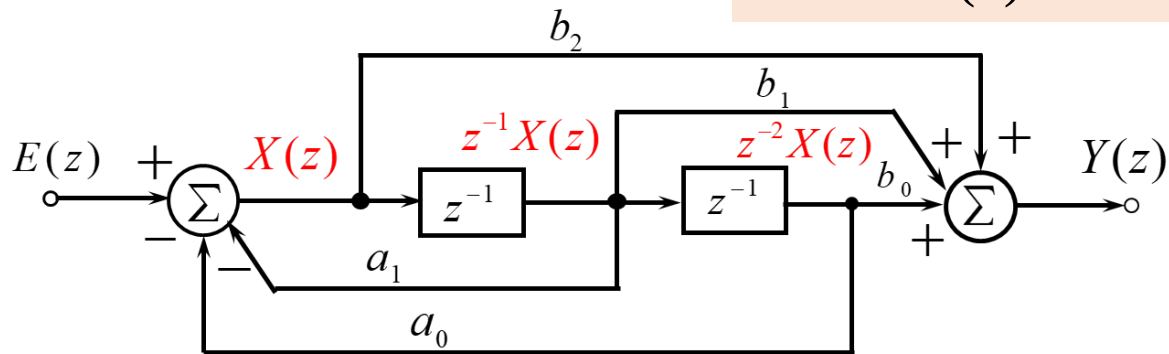
■ 系统函数与系统的 z 域框图



时域框图



$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$



z 域框图

$$E(z) - a_1 z^{-1} X(z) - a_0 z^{-2} X(z) = X(z) \quad b_2 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_0 z^{-2} X(z) = Y(z)$$

$$E(z) = (1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = (b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}) \cdot X(z)$$

■ 系统函数，差分方程与系统 z 域框图的转换

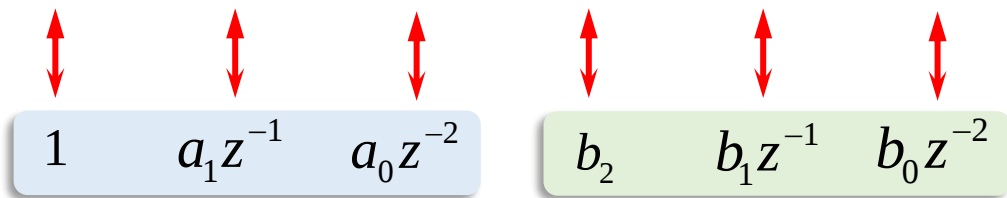
差分方程



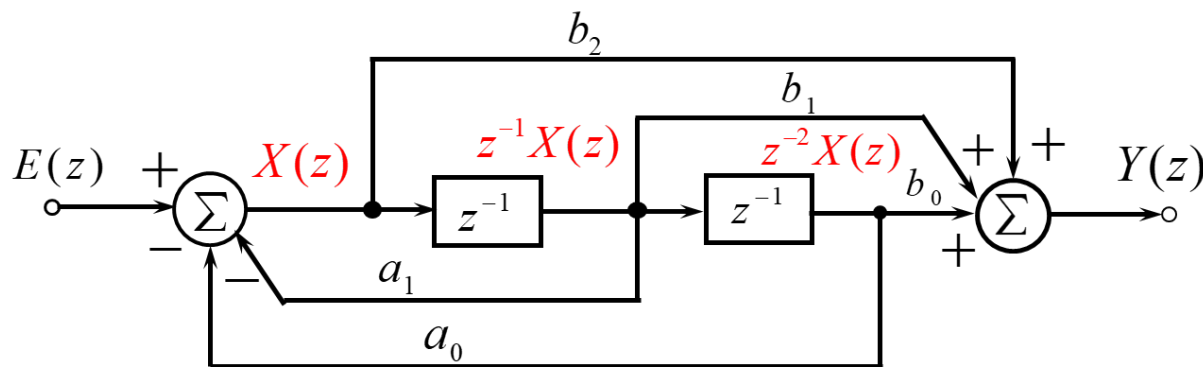
系统函数

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)$$

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$



系统框图



延时单元 $\Leftrightarrow z^{-1}$

z 域框图

例题25

1) 已知某离散系统的差分方程为 $y(k) + 4y(k-1) + 3y(k-2) = e(k) - 3e(k-1)$, 试求系统函数 $H(z)$;

2) 已知离散时间系统的系统函数为 $H(z) = \frac{z^2 + 6}{z^2 + 5z + 6}$, 试写出该系统的差分方程。

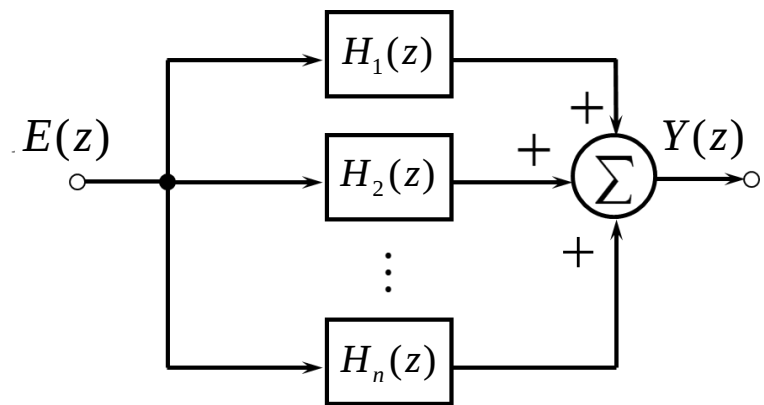
例题26

某离散系统当 $e(k) = \varepsilon(k)$ 时，零状态响应为 $y_{zs}(k) = [2 - 0.5^k + (-1.5)^k] \varepsilon(k)$

- 1) 求解系统的系统函数 $H(z)$;
- 2) 求解系统的差分方程。

■ 系统函数与系统的 z 域框图

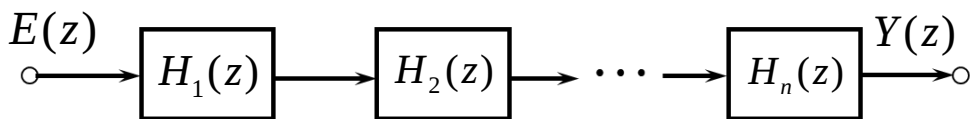
➤ 并联系统：系统函数为子系统函数之和。（时域为相加）



$$h(k) = h_1(k) + h_2(k) + \cdots + h_n(k)$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z)$$

➤ 级联系统：系统函数为子系统函数之积。（时域为卷积和）

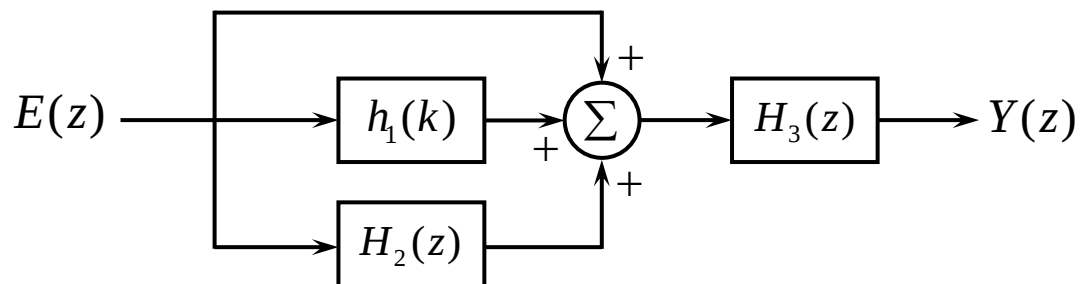


$$h(k) = h_1(k) * h_2(k) * \cdots * h_n(k)$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdots H_n(z)$$

例题27

已知离散复合系统如下图所示，已知各子系统的单位序列响应或系统函数分别为 $h_1(k) = \varepsilon(k)$ ， $H_2(z) = \frac{z}{z+1}$ ， $H_3(z) = \frac{1}{z}$ ，求此复合系统的系统函数 $H(z)$ 。



6.5 系统函数与系统特性

系统函数的零点与极点

系统函数零、极点分布与系统的时域特性

系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的频率响应特性

■ 系统函数的零点与极点

系统函数的零点与极点

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$H(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} = B \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

系统函数的零点： $z = z_j$

系统函数的极点： $z = p_i$

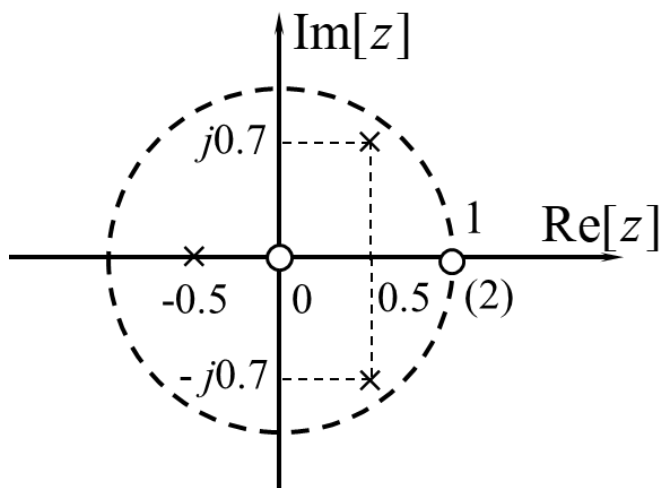
系统函数的零、极点分布图

把系统函数的零、极点画在 z 平面上的图形，称为系统函数的零、极点分布图。

一般用“○”表示零点，用“×”表示极点，高阶的零、极点需要在对应点处标明阶数。

■ 系统函数的零点与极点

$$H(z) = \frac{z(z-1)^2}{(z+0.5)[z-(0.5+j0.7)][z-(0.5-j0.7)]}$$



三个零点：

$$\underline{z_1 = 0}, \quad \underline{z_{2,3} = 1}$$

一阶零点 二阶零点

三个极点：

$$p_1 = -0.5, \quad p_2 = 0.5 + j0.7, \quad p_3 = 0.5 - j0.7$$

(均为一阶极点)

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

极点在单位圆内

$$|z| = |a| < 1$$

极点形式	系统函数	时域响应形式	响应特点
一阶实极点 $p_i = a$	$\frac{Az}{z - a}$	$Aa^k \varepsilon(k)$	$ a < 1$ 指数 衰减 规律 $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \rightarrow 0$ 响应幅度 收敛
共轭单极点 $p_{1,2} = ae^{\pm j\beta}$	$\frac{ A_1 e^{j\theta}z}{z - ae^{j\beta}} + \frac{ A_1 e^{-j\theta}z}{z - ae^{-j\beta}}$	$2 A_1 a^k \cos(\beta k + \theta)\varepsilon(k)$	
重极点 例：2重实极点	$\frac{Az}{(z - a)^2}$	$Aka^{k-1}\varepsilon(k)$	

极点位于**单位圆内**时，单位序列响应最终**收敛至0**

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

极点在单位圆上

$$|z| = |a| = 1$$

极点形式	系统函数	时域响应形式	响应特点
一阶实极点 $p_i = \pm 1$	$\frac{Az}{z \mp 1}$	$A(\pm 1)^k \varepsilon(k)$	$ a = 1$ 响应为 稳态分量
共轭单极点 $p_{1,2} = e^{\pm j\beta}$	$\frac{ A_1 e^{j\theta}z}{z - e^{j\beta}} + \frac{ A_1 e^{-j\theta}z}{z - e^{-j\beta}}$	$2 A_1 \cos(\beta k + \theta)\varepsilon(k)$	(阶跃、正弦等)
重极点 例：2重实极点	$\frac{Az}{(z \mp 1)^2}$	$Ak(\pm 1)^k \varepsilon(k)$	$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \rightarrow \infty$ 响应幅度 发散

极点位于**单位圆上**时，**一阶**极点的响应为**稳态分量**
二阶及以上极点，单位序列响应幅度发散，趋于**无界**

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

极点在单位圆外

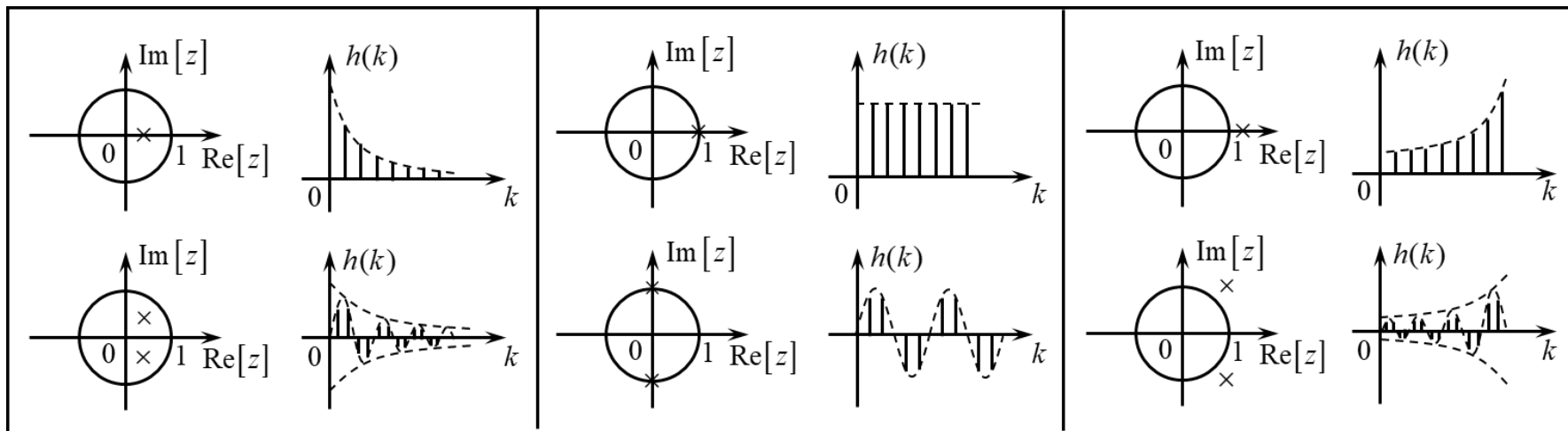
$$|z| = |a| > 1$$

极点形式	系统函数	时域响应形式	响应特点
一阶实极点 $p_i = a$	$\frac{Az}{z - a}$	$Aa^k \varepsilon(k)$	$ a > 1$
共轭单极点 $p_{1,2} = ae^{\pm j\beta}$	$\frac{ A_1 e^{j\theta} z}{z - ae^{j\beta}} + \frac{ A_1 e^{-j\theta} z}{z - ae^{-j\beta}}$	$2 A_1 a^k \cos(\beta k + \theta) \varepsilon(k)$	指数 增长 规律 $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \rightarrow \infty$
重极点 例：2重实极点	$\frac{Az}{(z - a)^2}$	$Aka^{k-1} \varepsilon(k)$	响应幅度 发散

极点位于**单位圆外**时，单位序列响应幅度**发散**，趋于**无界**

■ 系统函数零、极点分布与系统的时域特性

系统函数零、极点与时域特性的关系总结 ☆



- 单位圆内的极点所对应的响应，当 $k \rightarrow \infty$ 时，幅度衰减到0；
- 单位圆上的一阶极点对应的系统响应为稳态分量；
- 单位圆上的二阶以上的极点以及单位圆外的极点所对应的响应，幅度随着 $k \rightarrow \infty$ 而趋于无穷大；
- 系统函数的零点只影响响应的幅度与相位。

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

因果系统的判断方法

● 时域判断

系统的单位序列响应 $h(k)$ 为因果信号，即 $h(k) = 0, k < 0$ 。

● z 域判断

系统函数 $H(z)$ 的收敛域为 $|z| > \rho_0$ ，即系统函数的收敛域在极点所在最大半径圆的外部。

稳定系统的判断方法

● 时域判断 系统的单位序列响应 $h(k)$ 绝对可和，即 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \leq M$ 。

● z 域判断 系统函数 $H(z)$ 的收敛域必须包含单位圆 $|z| = 1$ 。

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

因果稳定系统的判断方法

● 时域判断

系统的单位序列响应 $h(k)$ 因果，且绝对可和，即 $\sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)| \leq M$ 。

● z 域判断

因果稳定系统

系统函数的极点全部在单位圆 $|z|=1$ 内。

因果临界稳定系统

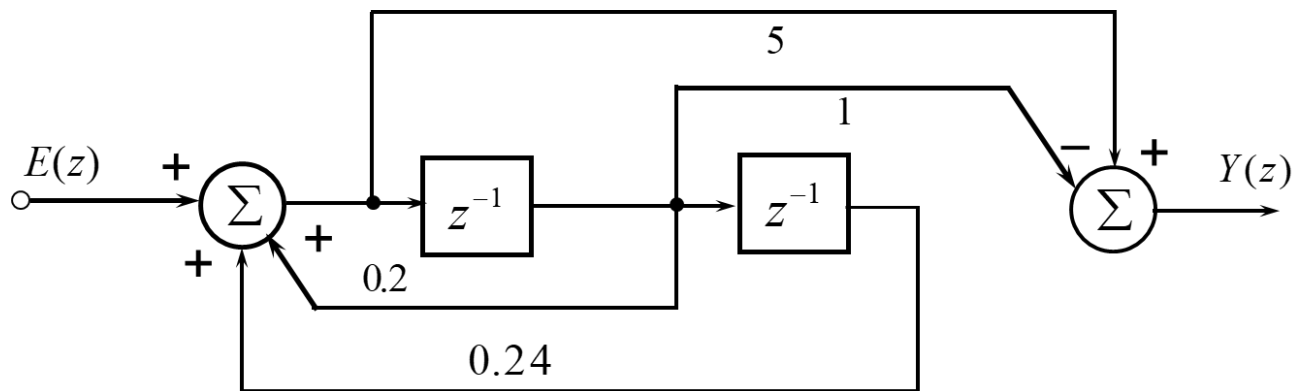
系统函数在单位圆上仅有一阶极点，其余极点全部在单位圆内。

因果不稳定系统

系统函数在单位圆上含有二阶及以上极点，或在单位圆外含有极点。

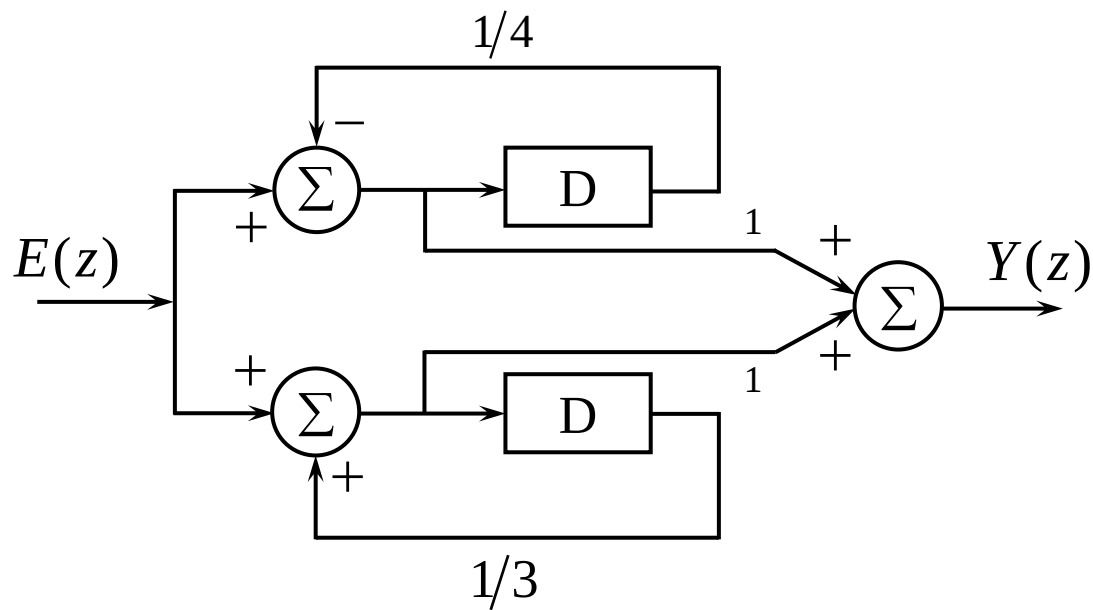
例题28

图示因果系统：1) 判断系统是否稳定；2) 求单位序列响应 $h(k)$ 。



例题29

图示因果系统：1) 判断系统是否稳定；2) 求单位序列响应 $h(k)$ 。

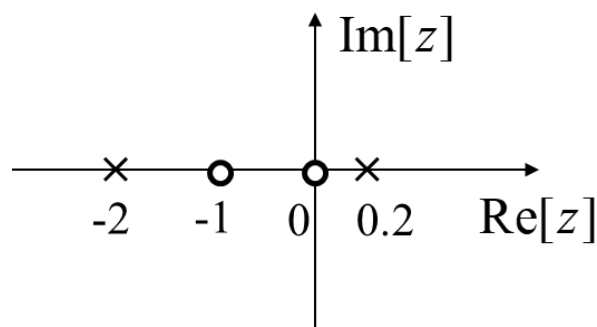


例题30

给定离散线性时不变系统 $y(k-1) - \frac{10}{3}y(k) + y(k+1) = e(k)$ ，已知系统是稳定的，试求其单位序列响应。

例题31

某线性时不变离散系统系统函数的零极点分布如图所示，试指出 $H(z)$ 可能的收敛域，并对每一种收敛域确定系统的因果性与稳定性。



■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的稳定性准则：朱里准则

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

系统稳定，即系统函数的极点均在单位圆内（ $A(z)=0$ 的根全在单位圆内）的条件为：分母多项式 $A(z)$ 满足：

1) $A(1) > 0$ $(-1)^n A(-1) > 0$

2) 朱里表奇数行第一个元素大于最后一个元素的绝对值，即：

$$a_n > |a_0|, \quad c_{n-1} > |c_0|, \quad d_{n-2} > |d_0|, \quad \cdots, \quad r_2 > |r_0|$$

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的稳定性准则：朱里准则

朱里表

1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0	} 由多项式 $A(z)$ 的系数构成
2	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	
3	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	} 第 3 行之后的 奇数行需要计算	
4	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}	c_{n-1}		
5	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	$\cdots$	d_0			
6	d_0	d_1	d_2	$\cdots$	d_{n-2}			
...	...	...	...	...				
$2n-3$	r_2	r_1	r_0				最后一行有3个元素	

第 3 行以后奇数行的计算规则：

$$c_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} \quad c_{n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad c_0 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$d_{n-2} = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_0 \\ c_0 & c_{n-1} \end{vmatrix} \quad d_{n-3} = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_1 \\ c_0 & c_{n-2} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad d_0 = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}$$

例题32 已知系统函数分母多项式如下，判别系统的稳定性。

1) $A(z) = 2z^4 - 4z^3 + 2z - 3$

2) $A(z) = 2z^4 + 2z^3 - 4z - 1$

3) $A(z) = 4z^4 - 4z^3 + 2z - 1$

■ 系统函数与系统的因果性、稳定性

离散系统的稳定性准则：朱里准则

二阶情形 $A(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

系统稳定，即系统函数的极点均在单位圆内（ $A(z)=0$ 的根全在单位圆内）的条件为：分母多项式 $A(z)$ 满足：

$$A(1) > 0, A(-1) > 0, a_2 > |a_0|$$

例题33

某离散系统的系统函数 $H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.5z + (K + 1)}$ ，求使得系统稳定的 K 值的取值范围。

■ 离散系统的频率响应特性

系统对正弦序列的响应

➤ 激励为虚指数序列

$$e(k) = e^{j\omega k} \longrightarrow y_1(k) = h(k) * e^{j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{j\omega(k-n)} = e^{j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

设因果系统稳定，此时收敛域包含单位圆，令 $z = e^{j\omega}$ ，则：

$$y_1(k) = e^{j\omega k} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)(e^{j\omega})^{-n} \right] = e^{j\omega k} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \right]_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega k} H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega k} H(e^{j\omega})$$

$$y(k) = H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega k} = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{附加幅度}} \underbrace{e^{j[\omega k + \varphi(\omega)]}}_{\text{附加相位}}$$

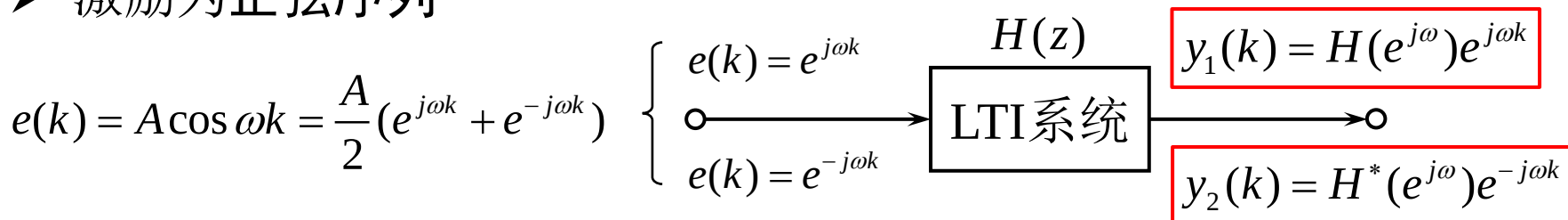
虚指数序列的稳态响应

$$e(k) = e^{-j\omega k} \longrightarrow y_2(k) = h(k) * e^{-j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega(k-n)} = e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{j\omega n}$$

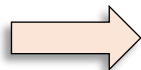
$$y_2(k) = e^{-j\omega k} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{j\omega n} \right]^* = e^{-j\omega k} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \right]_{z=e^{j\omega}}^* = e^{-j\omega k} H^*(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\omega k} H^*(e^{j\omega})$$

■ 离散系统的频率响应特性

➤ 激励为正弦序列

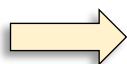


$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \\ H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\varphi(\omega)} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{A}{2} \left[e^{j\omega k} |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} + e^{-j\omega k} |H(e^{j\omega})| e^{-j\varphi(\omega)} \right] \\ &= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega})| \left[e^{j[\omega k + \varphi(\omega)]} + e^{-j[\omega k + \varphi(\omega)]} \right] \\ &= A |H(e^{j\omega})| \cos[\omega k + \varphi(\omega)] \end{aligned}$$

$$e(k) = A \cos(\omega k + \theta)$$



$$y(k) = \underbrace{A |H(e^{j\omega})|}_{\text{附加幅度}} \cos[\omega k + \theta + \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{附加相位}}]$$

正弦稳态响应

激励信号为虚指数/正弦序列时，系统稳态响应仍为相同数字角频率的虚指数/正弦序列，其幅度和相位由 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\varphi(\omega)$ 确定，并附加在原序列上。

■ 离散系统的频率响应特性

离散系统的频率响应函数

因果稳定系统，收敛域包含单位圆，则频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

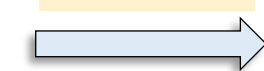
单位圆 $z = e^{j\omega}$ 上的系统函数 $H(z)$ 就是频率响应。

注意事项 频响函数 $H(e^{j\omega})$ 里的 ω 与连续信号 $H(j\omega)$ 的 ω 不同

$H(e^{j\omega}) \sim \omega$: 数字角频率
 $H(j\omega) \sim \omega$: 模拟角频率

模拟角频率 Ω

$$\omega = \Omega T$$



数字角频率 ω

采样周期 T

频响函数的其它写法

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\theta})$$

■ 离散系统的频率响应特性

频率响应函数的性质

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

物理意义：反映系统对不同数字频率 ω 的正弦序列的稳态响应特性。

➤ 频响函数 $H(e^{j\omega})$ 是**周期函数**，周期为 2π 。

单位圆 $z = e^{j\omega}$ 的周期为 2π ，故频响函数值也具有 2π 的周期。

➤ 频响函数 $H(e^{j\omega})$ 是数字角频率 ω 的**连续函数**。

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \begin{cases} |H(e^{j\omega})| \sim \omega \text{ 的偶函数} & \text{幅频响应特性} \\ \varphi(\omega) \sim \omega \text{ 的奇函数} & \text{相频响应特性} \end{cases}$$

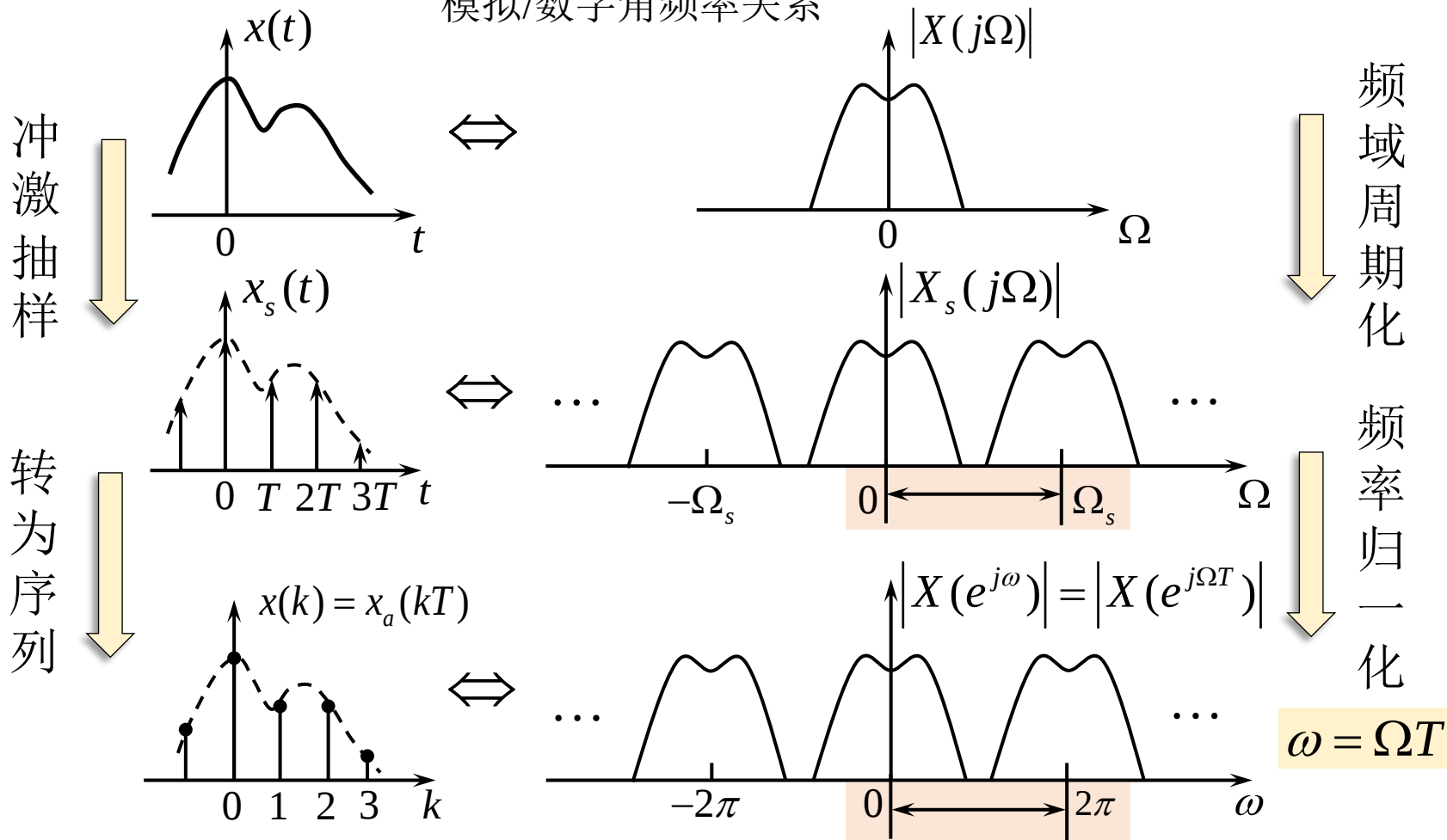
离散系统的频率响应特性

● 频谱的周期性分析

$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_s}$$

Ω	0	$\Omega_s/2$	Ω_s
ω	0	π	2π

模拟/数字角频率关系

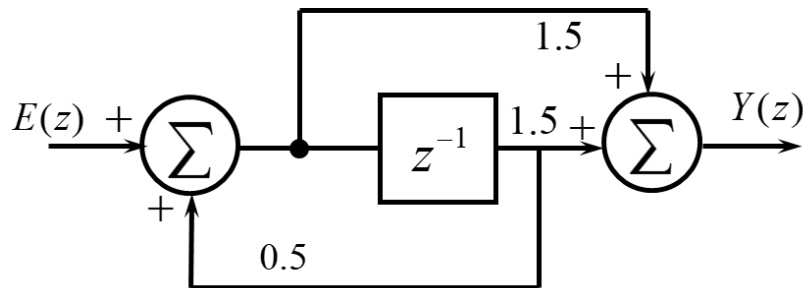


例题34

某离散系统的 z 域模型如图所示。

1) 求系统的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$;

2) 已知输入序列 $e(k) = 2 + 5\cos\left(\frac{\pi}{3}k + 30^\circ\right)$, 求系统的稳态响应 $y_{ss}(k)$ 。



■ 离散系统的频率响应特性

系统零、极点与频响函数的关系

$$H(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} = B \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = B \frac{\prod_{j=1}^m (e^{j\omega} - z_j)}{\prod_{i=1}^n (e^{j\omega} - p_i)} \quad \begin{cases} \text{零矢量: } e^{j\omega} - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } e^{j\omega} - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$

幅频响应特性

$$H(e^{j\omega}) = B \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = B \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n}$$

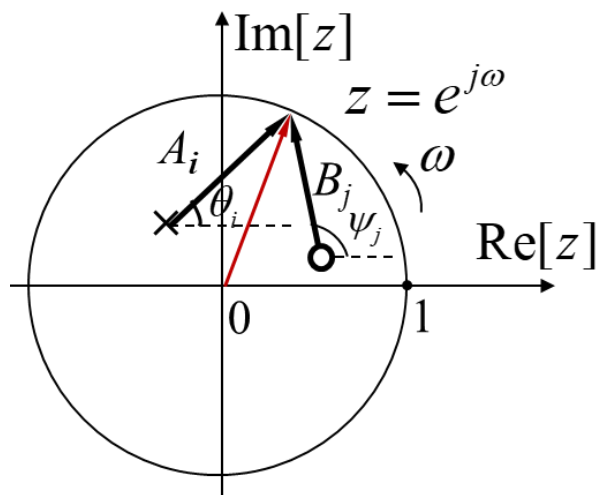
相频响应特性

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

■ 离散系统的频率响应特性

频率特性的几何分析

$$H(e^{j\omega}) = B \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}} \quad \begin{cases} \text{零矢量: } e^{j\omega} - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } e^{j\omega} - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$



幅频响应特性

$$|H(e^{j\omega})| = B \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n} = B \frac{\text{零矢量模值之积}}{\text{极矢量模值之积}}$$

相频响应特性

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &= \text{零矢量相角之和} - \text{极矢量相角之和} \end{aligned}$$

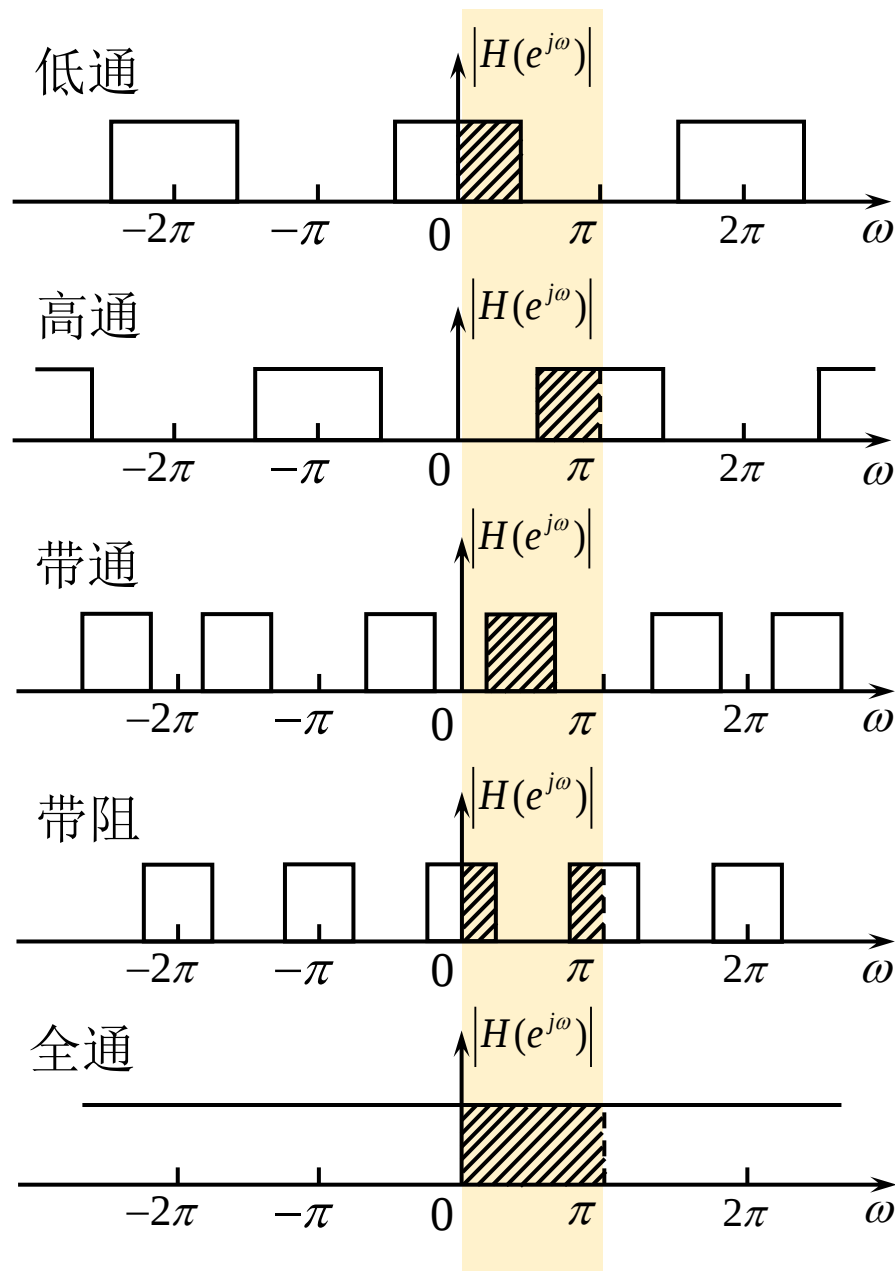
复变量 z 沿单位圆逆时针旋转，各矢量的模和相位随 ω 变化，根据变化的情况，可画出幅频和相频特性曲线。沿单位圆旋转具有 2π 的周期，因此作出一个周期内的曲线即可。

■ 离散系统的频率响应特性

数字滤波器的分类

理想数字滤波器的频率特性如图所示，这些频率特性都是以 2π 周期的连续函数。

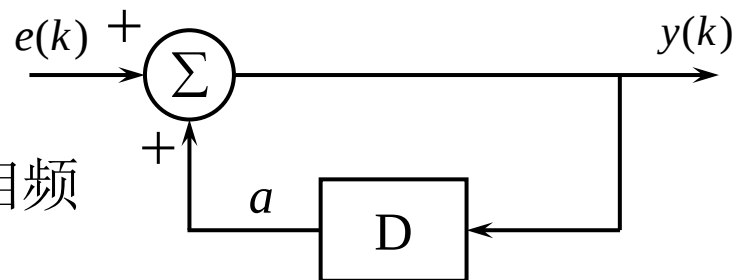
根据对称性，分析数字滤波器频率特性时，只要给出数字角频率 $\omega = \Omega T$ 在区间 $0 \sim \pi$ 内的变化情况即可。其中 0 代表低频， π 代表高频，根据频响函数寻求满足或者逼近性能要求的系统函数。



例题35

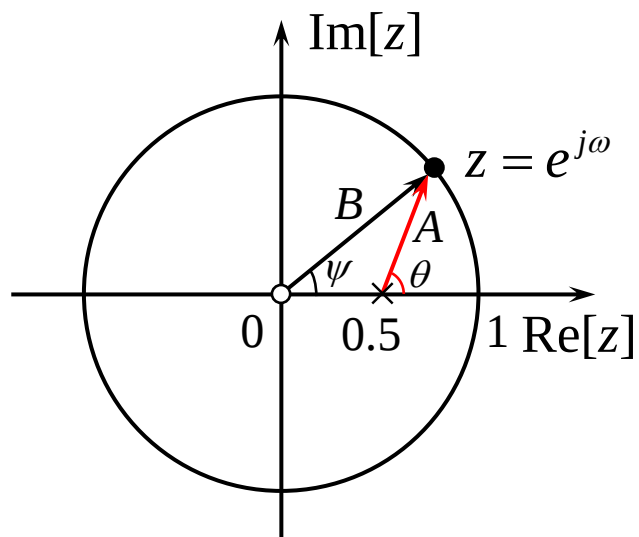
求图示一阶离散系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$

粗略作出 $a = 0.5$ 和 -0.5 时的幅频特性与相频特性曲线。



例题35

$$a = 0.5 \quad H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0.5} = \frac{Be^{j\psi}}{Ae^{j\theta}}$$



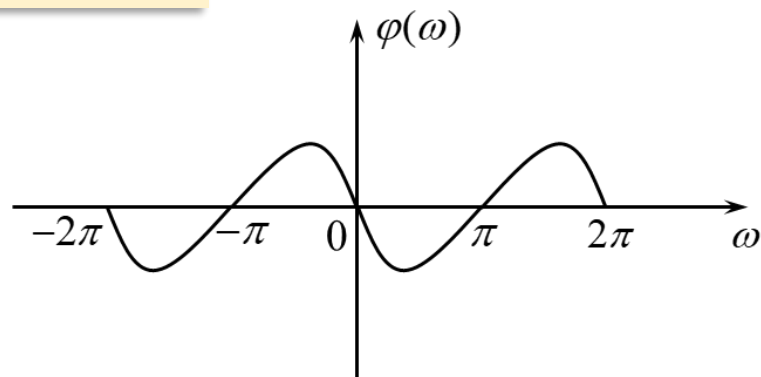
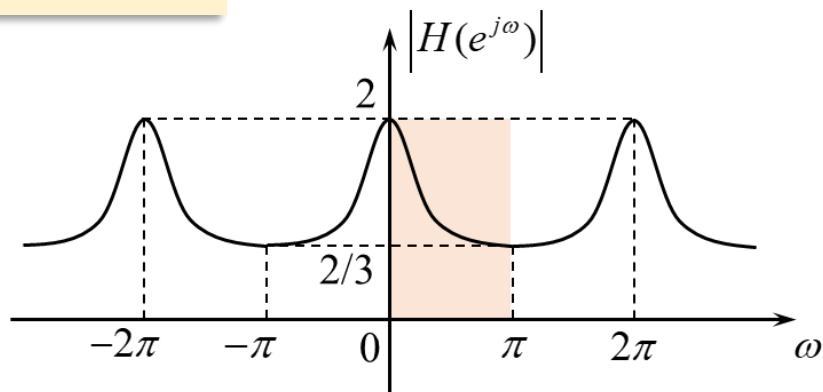
$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| = \frac{B}{A} \\ \varphi(\omega) = \psi - \theta \end{cases}$$

ω	$ H(e^{j\omega}) $	$\varphi(\omega)$
0	2	0
$0 \rightarrow \pi$	$\searrow$	< 0
π	$2/3$	0
$\pi \rightarrow 2\pi$	$\nearrow$	> 0
2π	2	0

幅频特性

低通特性

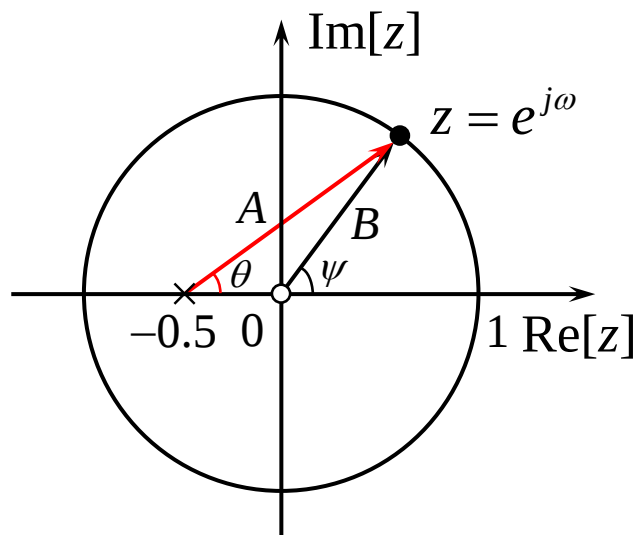
相频特性



$\omega = 0$ 时, $z = e^{j\omega}$ 离极点最近, 幅频达到峰值

例题35

$$a = -0.5 \quad H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} + 0.5} = \frac{Be^{j\psi}}{Ae^{j\theta}}$$



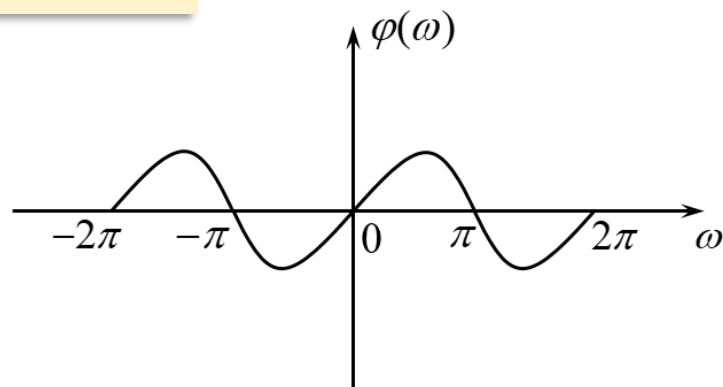
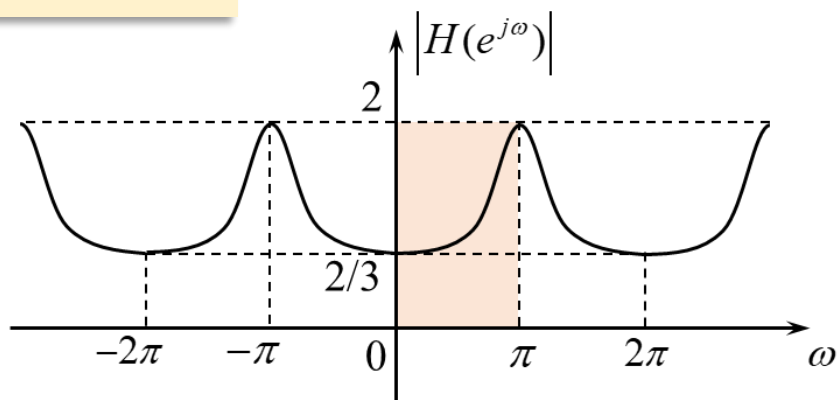
$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| = \frac{B}{A} \\ \varphi(\omega) = \psi - \theta \end{cases}$$

ω	$ H(e^{j\omega}) $	$\varphi(\omega)$
0	2/3	0
$0 \rightarrow \pi$	$\nearrow$	> 0
π	2	0
$\pi \rightarrow 2\pi$	$\searrow$	< 0
2π	2/3	0

幅频特性

高通特性

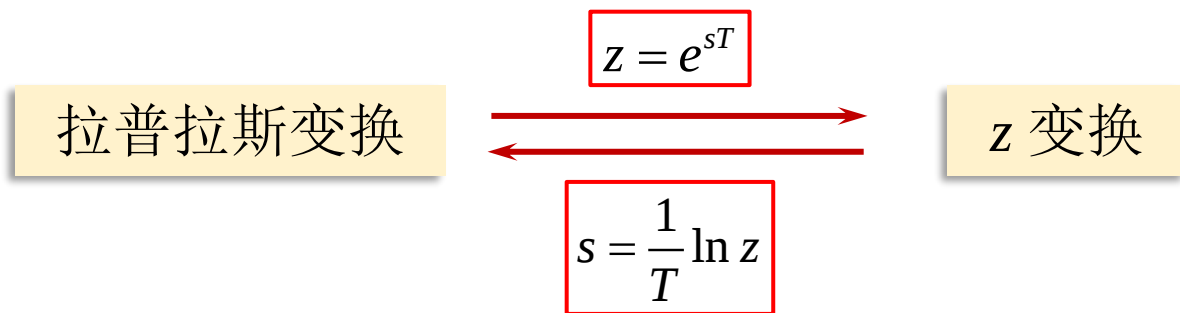
相频特性



$\omega = \pi$ 时, $z = e^{j\omega}$ 离极点最近, 幅频达到峰值

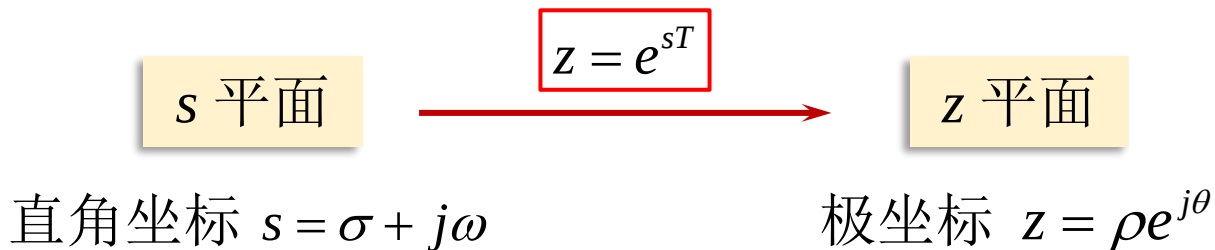
6.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系



其中 T 为采样周期, $f_s = \frac{1}{T}$ 为采样频率, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为采样角频率

$s - z$ 平面的映射关系



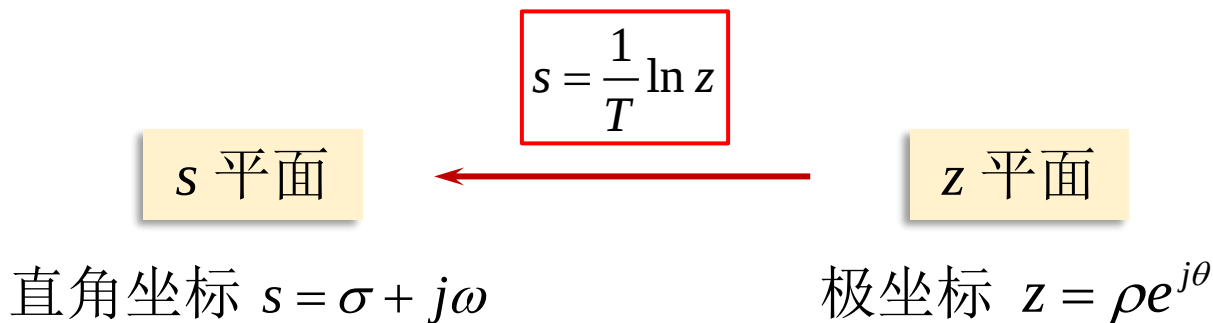
$$\rho e^{j\theta} = e^{\sigma T + j\omega T} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

极坐标极径 旋转角, 即数字角频率

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

$s - z$ 平面的映射关系

$e^{j\theta}$ 是以 2π 为周期的周期函数，因此在 s 平面上沿虚轴移动对应于 z 平面上沿单位圆周期旋转。 ω 在 s 平面上每平移 ω_s 对应于 z 平面上 θ 变化 2π （相当于沿着单位圆旋转一圈），故 $s - z$ 映射不是单值映射。



在 z 平面上的一点映射到 s 平面是无穷多点，表达式为：

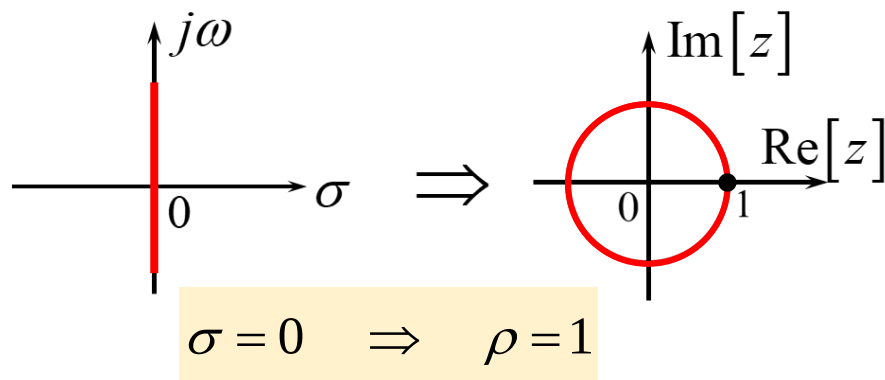
$$s = \frac{1}{T} \ln z = \frac{1}{T} \ln \rho + j \frac{\theta + 2m\pi}{T}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

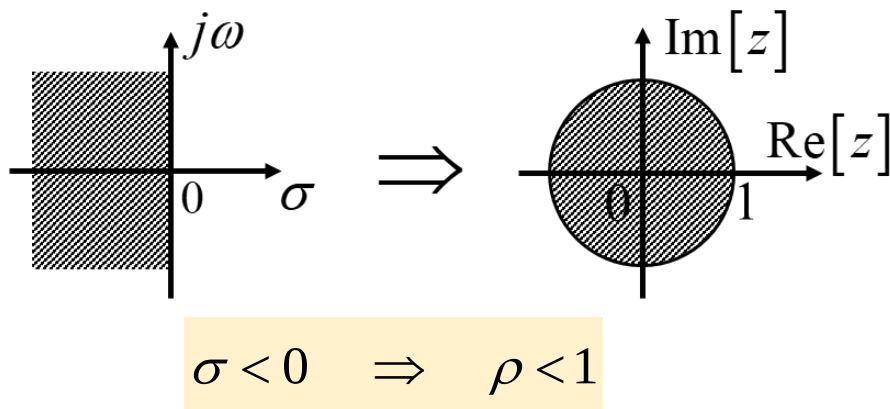
$s - z$ 平面映射关系总结

$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

s 平面 **虚轴** $\rightarrow$ z 平面 **单位圆**



s 平面 **左半平面** $\rightarrow$ z 平面单位圆 **内部**

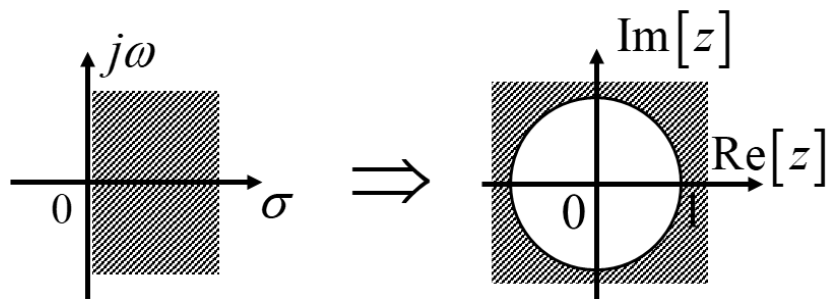


■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

$s - z$ 平面映射关系总结

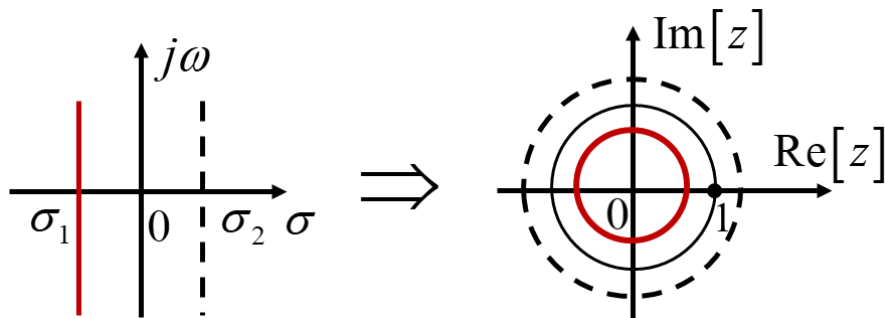
$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

s 平面**右**半平面 $\rightarrow z$ 平面单位圆**外部**



$$\sigma > 0 \Rightarrow \rho > 1$$

s 平面**平行于虚轴的直线** $\rightarrow z$ 平面的**某个圆环**



$$\operatorname{Re}[s] = \sigma_1 < 0 \Rightarrow |z| = \rho_1 < 1$$

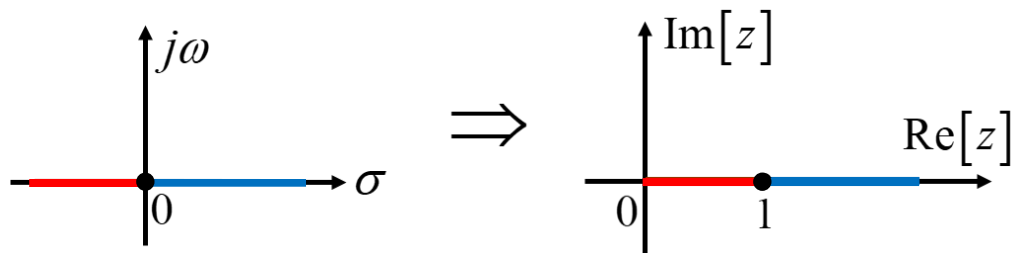
$$\operatorname{Re}[s] = \sigma_2 > 0 \Rightarrow |z| = \rho_2 > 1$$

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

s - z 平面映射关系总结

s 平面 **实轴** → z 平面 **正实轴**

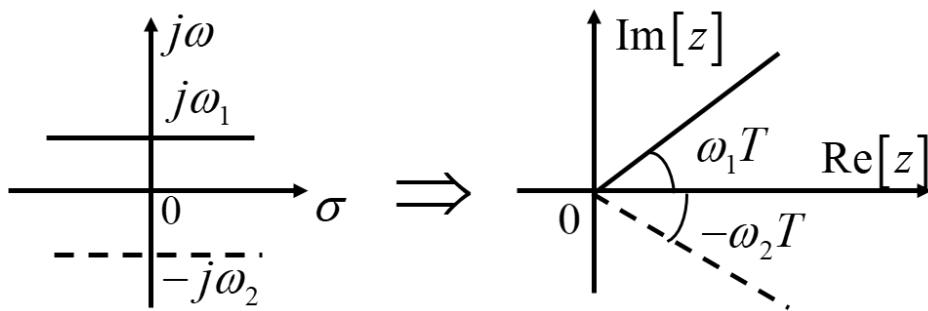


$$\omega = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\sigma < 0 \text{ 时} \Rightarrow \rho \in (0, 1)$$

$$\sigma > 0 \text{ 时} \Rightarrow \rho \in (1, +\infty)$$

s 平面 **平行于实轴的直线** → z 平面从原点出发极角为 $\theta = \omega_0 T$ 的 **射线**



$$-\infty < \sigma < +\infty \Rightarrow \rho > 0$$

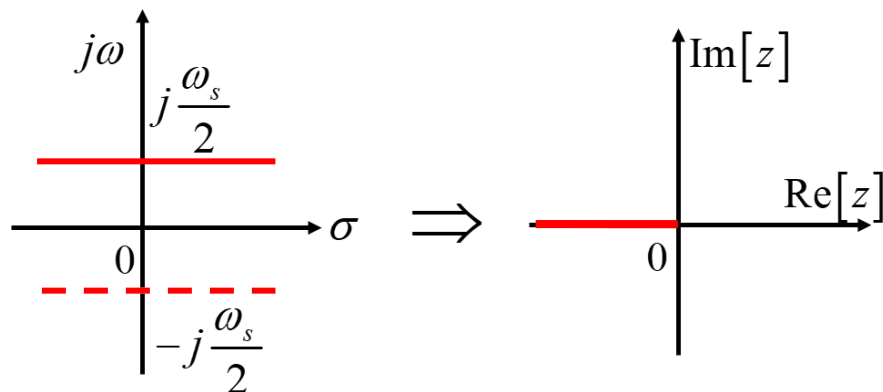
$$\text{Im}[s] = \omega = \omega_0 \Rightarrow \theta = \omega_0 T = 2\pi \frac{\omega_0}{\omega_s}$$

■ z 变换与拉普拉斯变换的关系

s - z 平面映射关系总结

$$\begin{cases} \rho = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

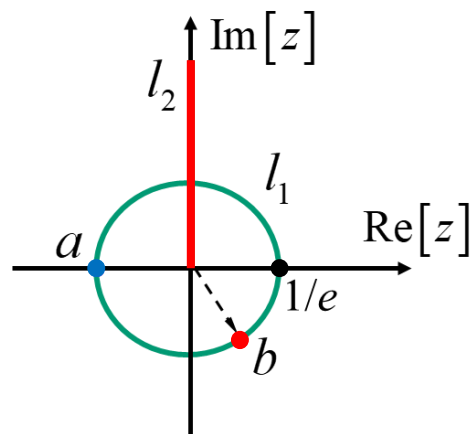
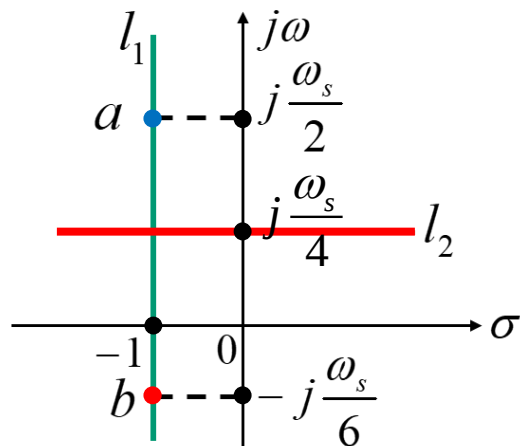
s 平面过 $\pm j \frac{k\omega_s}{2}$ 且平行于实轴的直线 $k=1,3,5,\dots \rightarrow z$ 平面的**负实轴**



$$\text{Im}[s] = \omega = \pm \frac{k\omega_s}{2} (k=1,3,5) \Rightarrow \theta = \pm \frac{k\omega_s}{2} T = \pm \frac{k\omega_s}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_s} = \pm k\pi$$

例题36

画出 s 平面上的直线 l_1, l_2 以及 a, b 点在 z 平面的映像（已知采样间隔 $T = 1$ ）。



例题37

- 1) 求 z 平面上的点 $z_0 = 2 + j2$ ，在 s 平面上的映像点 s_0 的坐标（设采样间隔 $T = 1$ ）；
- 2) s 平面的点 $A(-0.5, 0.5)$ 映射为 z 平面的点 B ， O 为 z 平面原点，求线段 OB 的长度（设取样周期 $T = 2$ ）。

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

信号与系统

第7章 系统模拟

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第7章 系统模拟

7.1 系统模拟的三种结构

7.2 信号流图与梅森公式

7.1 系统模拟的三种结构

系统模拟概述

系统的直接型结构

系统的级联型结构与并联型结构

■ 系统模拟概述

- 系统模拟是一种**数学模拟**，指的是根据实际系统的具体情况，用积分器、乘法器、加法器等部件来模拟该系统，此时模拟出的系统数学模型与实际系统一样。
- 系统模拟可以通过微分方程或者差分方程进行，也可以通过系统函数进行。由于系统函数是有理分式，运算较为简便，因此**系统模拟常通过系统函数进行**。
- 在本章中，首先利用框图进行系统模拟，给出**三种常用结构**；其次，为了进一步简化框图，给出**流图**的概念，与框图相比，流图的模型更加简明清楚，适用于复杂系统；最后，为了简化复杂系统的系统函数计算，介绍**梅森公式**求解系统函数的方法。

■ 系统的直接型结构

给定 n 阶LTI连续系统，其系统函数为：

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

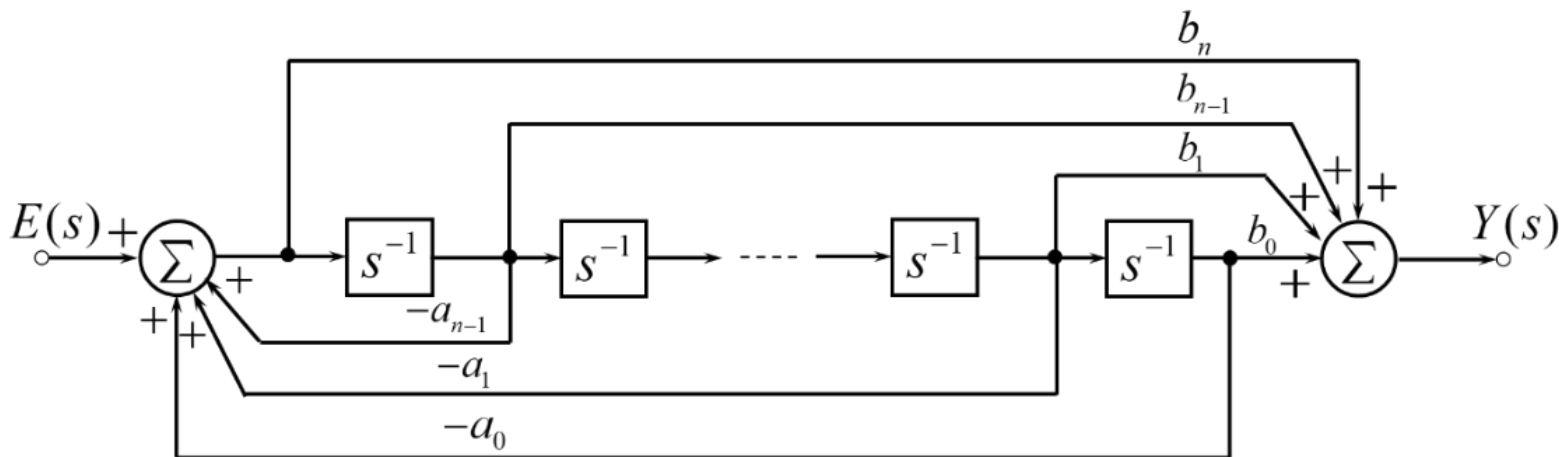
$$H(s) = \frac{b_n + b_{n-1} s^{-1} + b_{n-2} s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + a_{n-2} s^{-2} + \cdots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}}$$

$$= \frac{b_n + b_{n-1} s^{-1} + b_{n-2} s^{-2} + \cdots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 - (-a_{n-1} s^{-1} - a_{n-2} s^{-2} - \cdots - a_1 s^{-(n-1)} - a_0 s^{-n})}$$

在实现相同阶数的连续系统时
直接型结构**所需积分器数目最小**

→ 前向通路，右加法器

→ 反馈回路，左加法器



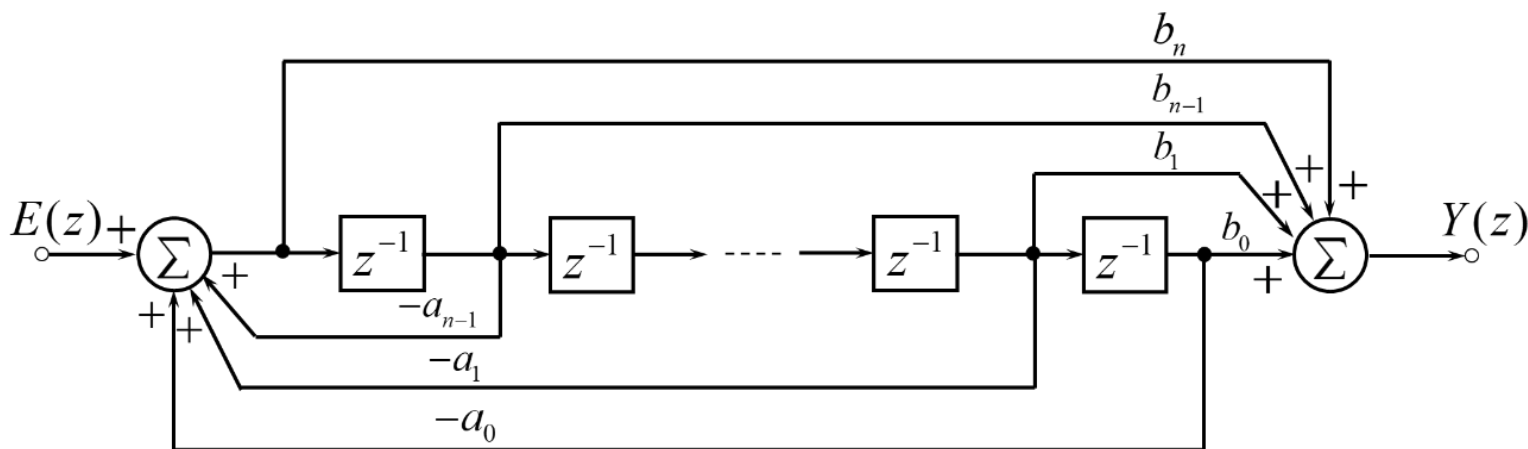
■ 系统的直接型结构

同理， n 阶LTI离散系统系统函数为：

$$H(z) = \frac{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \cdots + b_1z^{-(n-1)} + b_0z^{-n}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1z^{-(n-1)} + a_0z^{-n}}$$
$$= \frac{b_n + b_{n-1}z^{-1} + \cdots + b_1z^{-(n-1)} + b_0z^{-n}}{1 - (-a_{n-1}z^{-1} - \cdots - a_1z^{-(n-1)} - a_0z^{-n})}$$

在实现相同阶数的离散系统时
直接型结构**所需延时器数目最小**

→ 前向通路，右加法器
→ 反馈回路，左加法器

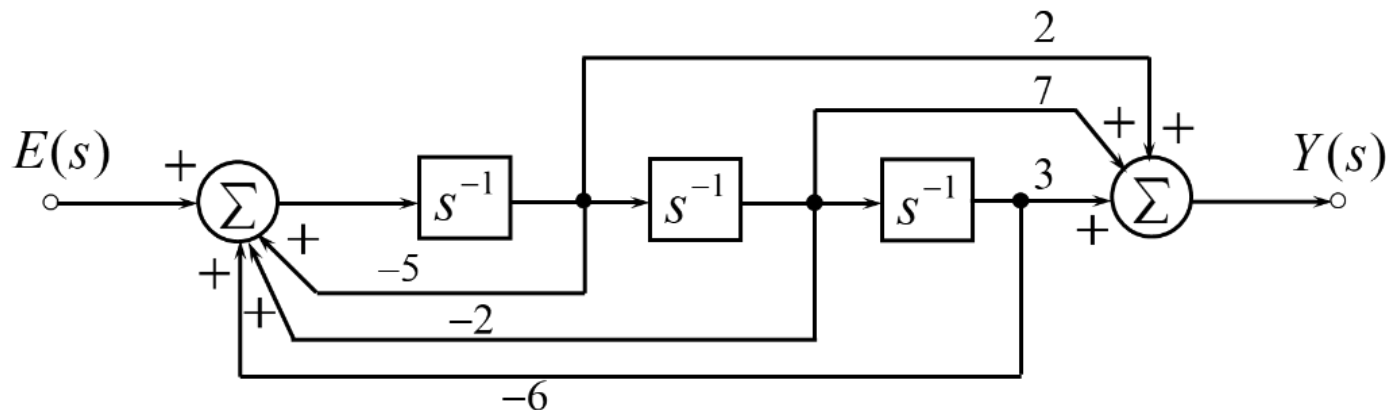


连续 $\rightarrow$ 离散 $s^{-1} \rightarrow z^{-1}$

例题1

- 1) 已知某连续系统的系统函数 $H(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3 + 5s^2 + 2s + 6}$ ，试画出该系统的直接型框图；
- 2) 求差分方程 $3y(k) - 2y(k-1) + 4y(k-3) = e(k-1) + 3e(k-2)$ 所描述离散系统的直接型框图。

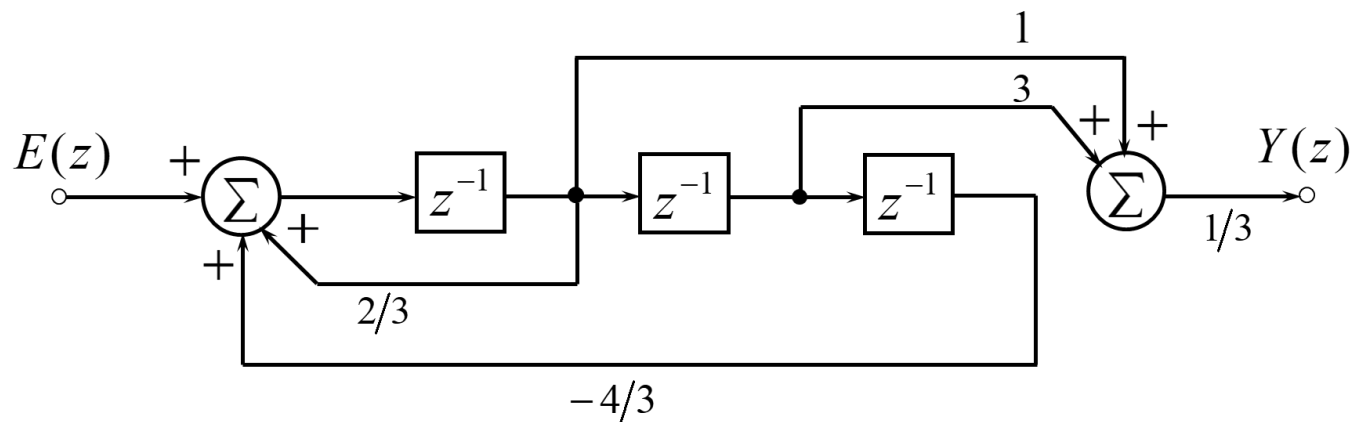
$$H(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3 + 5s^2 + 2s + 6} = \frac{2s^{-1} + 7s^{-2} + 3s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 2s^{-2} + 6s^{-3}} = \frac{2s^{-1} + 7s^{-2} + 3s^{-3}}{1 - (-5s^{-1} - 2s^{-2} - 6s^{-3})}$$



例题1

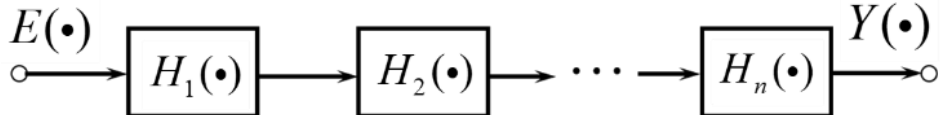
- 1) 已知某连续系统的系统函数 $H(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3 + 5s^2 + 2s + 6}$ ，试画出该系统的直接型框图；
- 2) 求差分方程 $3y(k) - 2y(k-1) + 4y(k-3) = e(k-1) + 3e(k-2)$ 所描述离散系统的直接型框图。

$$H(z) = \frac{z^{-1} + 3z^{-2}}{3 - 2z^{-1} + 4z^{-3}} = \frac{1}{3} \frac{z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-3}} = \frac{1}{3} \frac{z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - (\frac{2}{3}z^{-1} - \frac{4}{3}z^{-3})}$$



■ 系统的级联型结构与并联型结构

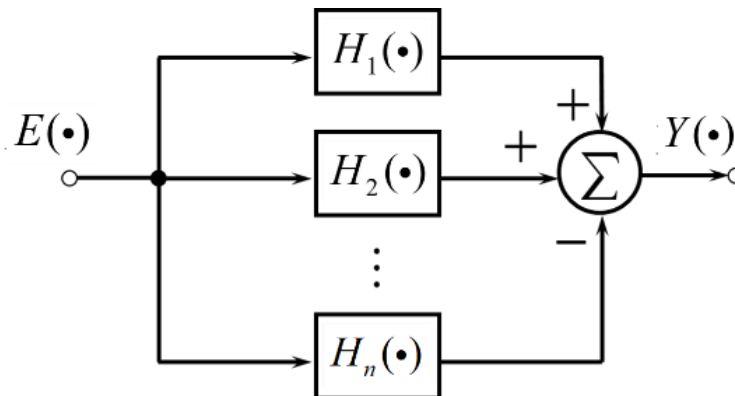
级联型结构 将系统函数分解为几个子系统函数的乘积。

$$H(\bullet) = H_1(\bullet)H_2(\bullet)\cdots H_n(\bullet) = \prod_{i=1}^n H_i(\bullet)$$


The diagram illustrates a cascade system structure. An input signal $E(\bullet)$ enters a series of blocks labeled $H_1(\bullet)$, $H_2(\bullet)$, ..., $H_n(\bullet)$. The output of the final block is $Y(\bullet)$.

并联型结构 将系统函数分解为几个子系统函数的和。

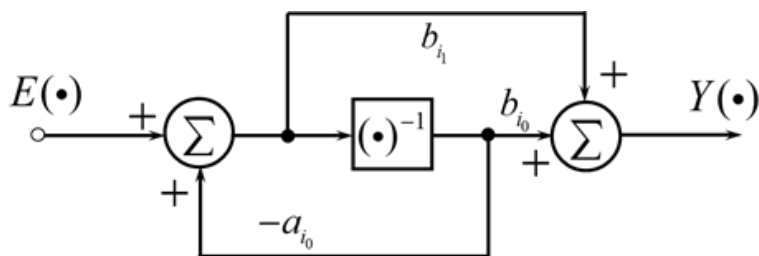
$$H(\bullet) = H_1(\bullet) + H_2(\bullet) + \cdots + H_n(\bullet) = \sum_{i=1}^n H_i(\bullet)$$



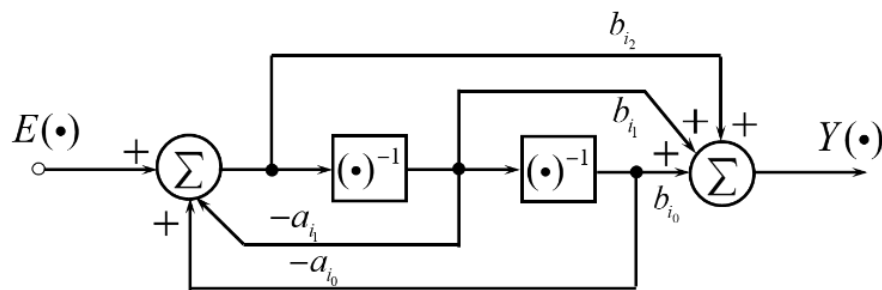
■ 系统的级联型结构与并联型结构

子系统的选取

通常选用一阶系统与二阶系统作为子系统，分别称为一阶节、二阶节，一阶节和二阶节均用直接型结构实现。



一阶节
$$H_i(s) = \frac{b_{i1} + b_{i0}(s)^{-1}}{1 - [-a_{i0}(s)^{-1}]}$$



二阶节
$$H_i(s) = \frac{b_{i2} + b_{i1}(s)^{-1} + b_{i0}(s)^{-2}}{1 - [-a_{i1}(s)^{-1} - a_{i0}(s)^{-2}]}$$

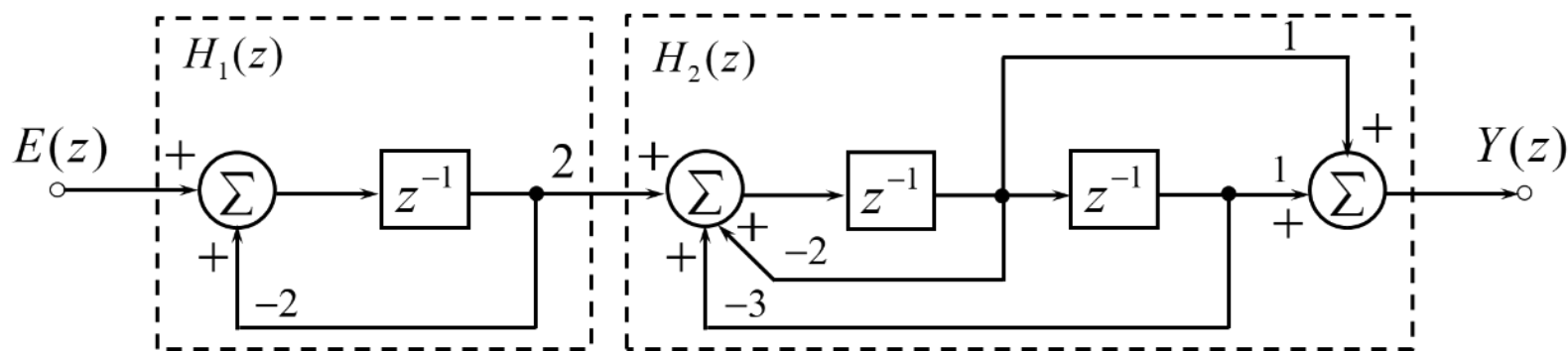
为保证各子系统物理可实现，因式的系数必须为实数。 $H(s)$ 的一个实极点可构成一阶节的分母，两个实极点或一对共轭复极点可构成二阶节的分母，共轭复极点不宜拆项，应作为整体构成二阶节。

例题2

已知某离散系统的系统函数 $H(z) = \frac{2(z+1)}{(z+2)(z^2+2z+3)}$ ，试画出该系统级联型与并联型的系统框图。

级联型框图：
$$H(z) = \frac{2(z+1)}{(z+2)(z^2+2z+3)} = \frac{2}{z+2} \cdot \frac{z+1}{z^2+2z+3} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

$$H_1(z) = \frac{2}{z+2} = \frac{2z^{-1}}{1-(-2z^{-1})} \quad H_2(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+3} = \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-(-2z^{-1}-3z^{-2})}$$

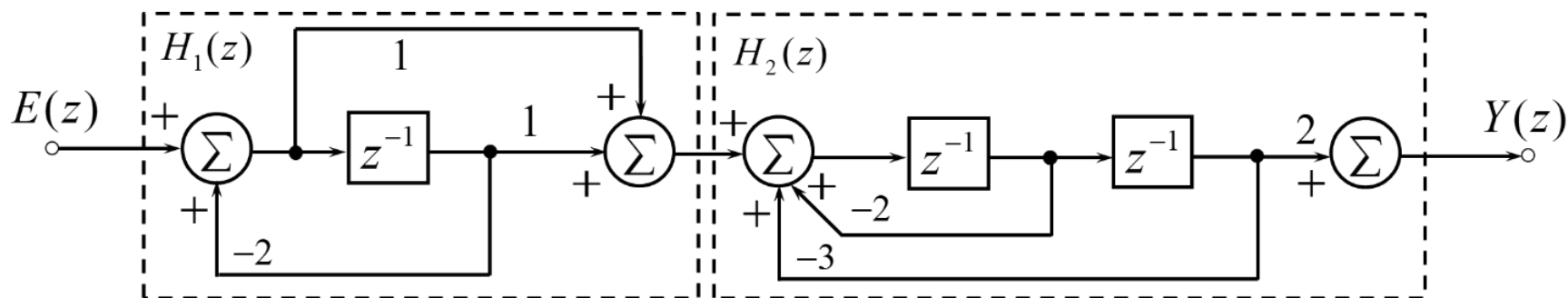


例题2

已知某离散系统的系统函数 $H(z) = \frac{2(z+1)}{(z+2)(z^2+2z+3)}$ ，试画出该系统级联型与并联型的系统框图。

级联型框图：
$$H(z) = \frac{2(z+1)}{(z+2)(z^2+2z+3)} = \frac{z+1}{z+2} \cdot \frac{2}{z^2+2z+3} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

$$H_1(z) = \frac{z+1}{z+2} = \frac{1+z^{-1}}{1-(-2z^{-2})} \quad H_2(z) = \frac{2}{z^2+2z+3} = \frac{2z^{-2}}{1-(-2z^{-1}-3z^{-2})}$$



例题2

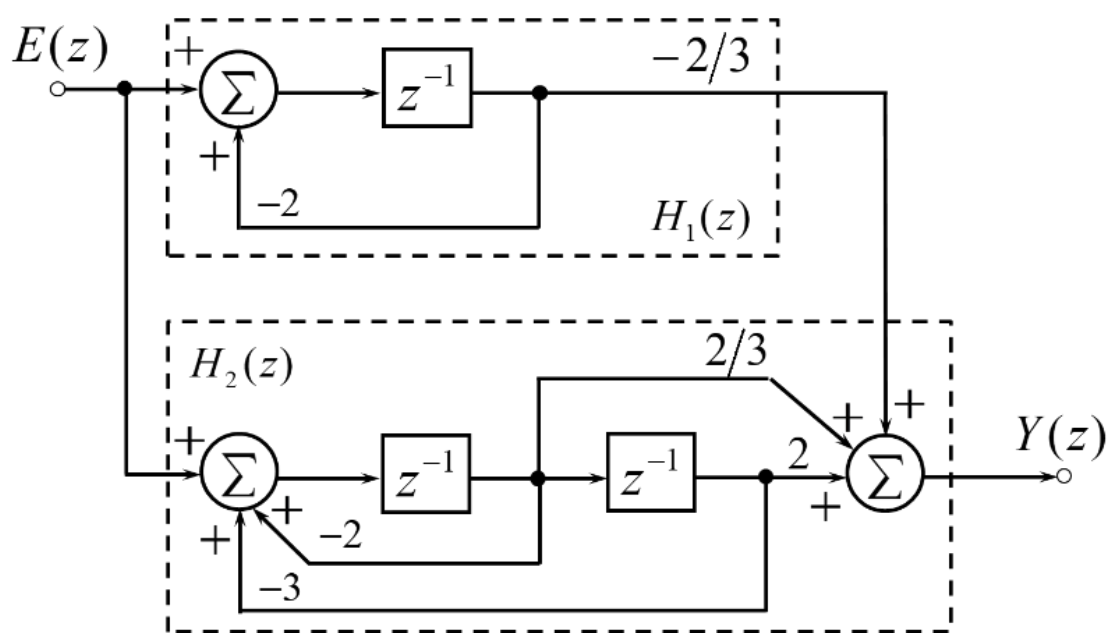
已知某离散系统的系统函数 $H(z) = \frac{2(z+1)}{(z+2)(z^2+2z+3)}$ ，试画出该系统级联型与并联型的系统框图。

并联型框图： $H(z) = \frac{2(z+1)}{(z+2)(z^2+2z+3)} = \frac{-\frac{2}{3}}{z+2} + \frac{\frac{2}{3}z+2}{z^2+2z+3} = H_1(z) + H_2(z)$

$$H_1(z) = \frac{-\frac{2}{3}}{z+2} = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{1-(-2z^{-1})}$$

$$H_2(z) = \frac{\frac{2}{3}z+2}{z^2+2z+3}$$

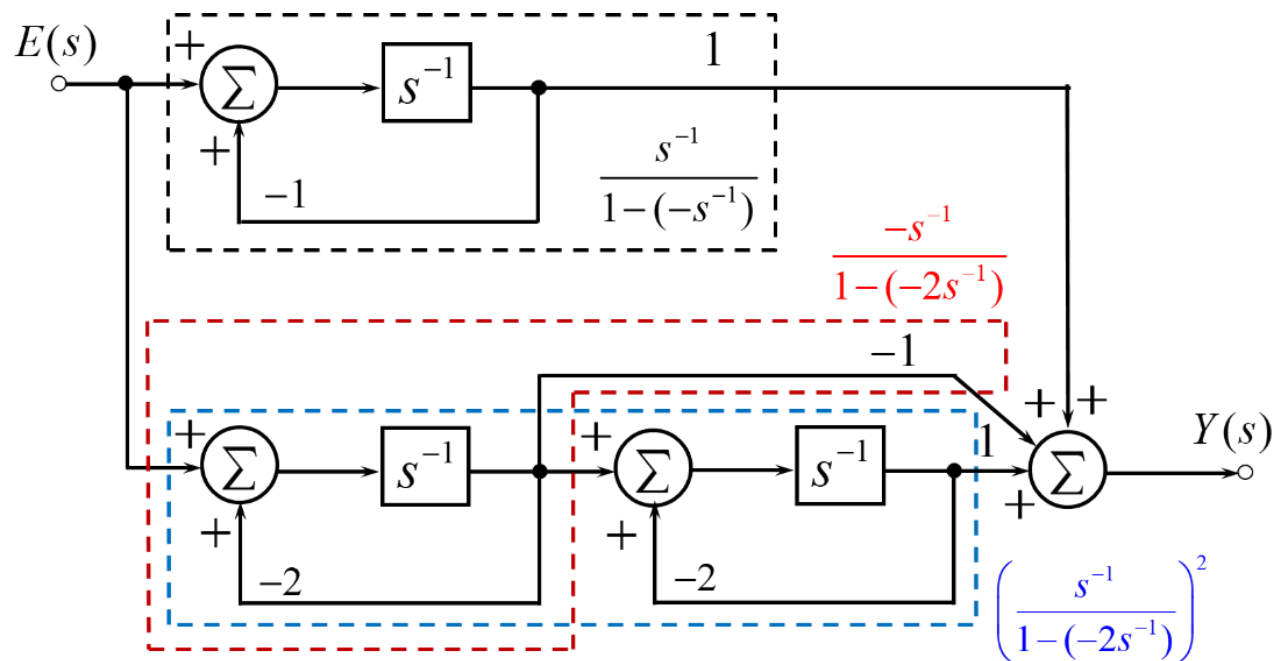
$$= \frac{\frac{2}{3}z^{-1} + 2z^{-2}}{1-(-2z^{-1}-3z^{-2})}$$



例题3

已知某连续系统的系统函数 $H(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)^2}$ ，试画出该系统的系统框图。

$$H(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{s^{-1}}{1-(-s^{-1})} + \frac{-s^{-1}}{1-(-2s^{-1})} + \left(\frac{s^{-1}}{1-(-2s^{-1})} \right)^2$$



■ 系统的级联型结构与并联型结构

三种框图结构的特点

- **直接型结构：**结构简单，但调整系统参数时，系统的零、极点均发生变动。
- **并联型结构：**可以单独调整极点，无法控制零点，相当于对输入信号做并行处理，运行速度高，没有运算误差的前后积累。
- **级联型结构：**可以单独调整系统的零点、极点。

7.2 信号流图与梅森公式

信号流图的基本概念与术语

信号流图的性质

信号流图的化简规则

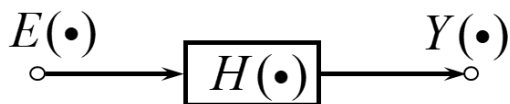
梅森公式

■ 信号流图的基本概念与术语

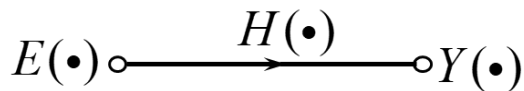
信号流图的概念

信号流图由**结点**和**支路**组成，结点表示系统中的变量或信号，支路表示信号传输路径，箭头代表传输方向，系统函数标注在箭头附近，称为**支路增益**，故每条支路可视为一个乘法器。

信号流图是一种**赋权的有向图**。



框图表示



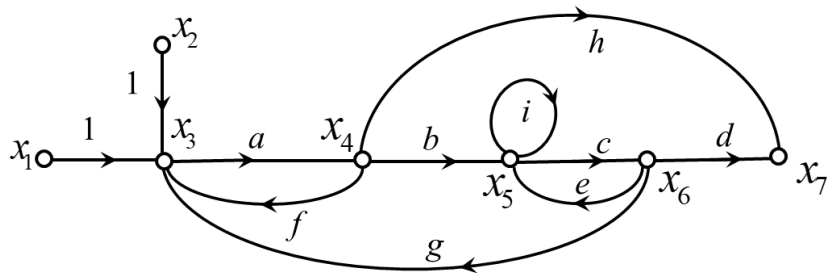
流图表示

$$Y = E \cdot H$$

变量因果关系
函数运算关系
信号传递关系

■ 信号流图的基本概念与术语

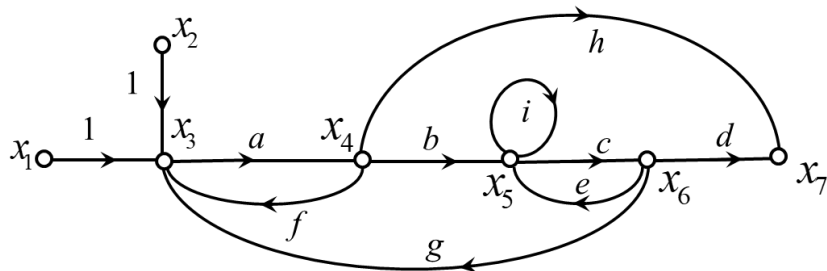
主要术语



- **结点**：表示变量或信号的点，每个结点对应一个变量或信号
- **支路**：连接两结点之间的有向线段，支路增益为这两个结点之间的转移函数（系统函数）
- **输入结点/源点**：仅有输出支路的结点，对应输入信号，如： x_1, x_2
- **输出结点/汇点**：仅有输入支路的结点，对应输出信号，如： x_7
- **混合结点**：既有输入支路又有输出支路的结点，如： x_3, x_4, x_5, x_6

■ 信号流图的基本概念与术语

主要术语



➤ **通路**：从任一结点出发沿箭头方向通过相连的不同支路和结点到达另一结点的路径，无相反方向支路。如： $x_1 \xrightarrow{1} x_3 \xrightarrow{a} x_4 \xrightarrow{f} x_3$

➤ **开通路**：与任一结点相交不多于一次的通路

如： $x_6 \xrightarrow{g} x_3 \xrightarrow{a} x_4 \xrightarrow{b} x_5$

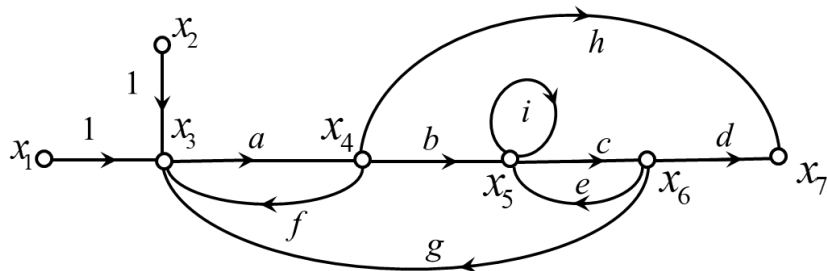
➤ **闭通路**：通路终点就是通路起点，并且与任何其他结点相交不多于一次，又称回路或者环。如： $x_3 \xrightarrow{a} x_4 \xrightarrow{f} x_3$ $x_5 \xrightarrow{c} x_6 \xrightarrow{e} x_5$

➤ **不接触回路**：两回路无公共结点

如： $x_3 \xrightarrow{a} x_4 \xrightarrow{f} x_3$ 与 $x_5 \xrightarrow{c} x_6 \xrightarrow{e} x_5$

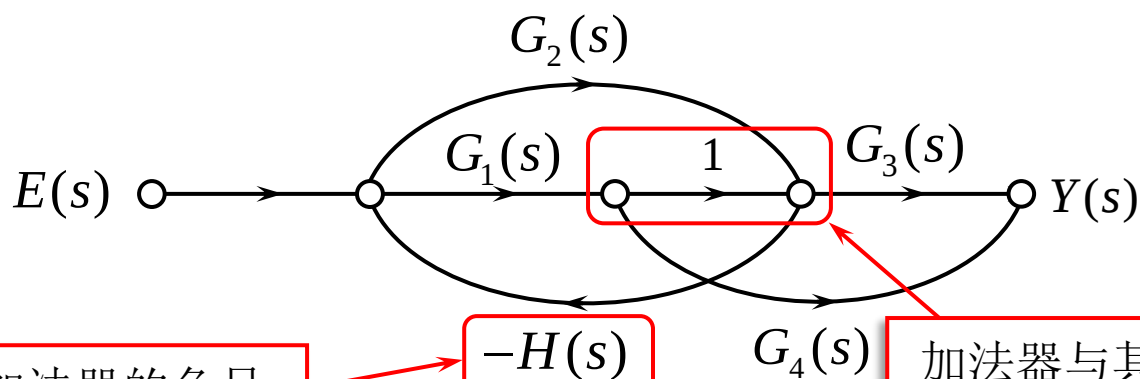
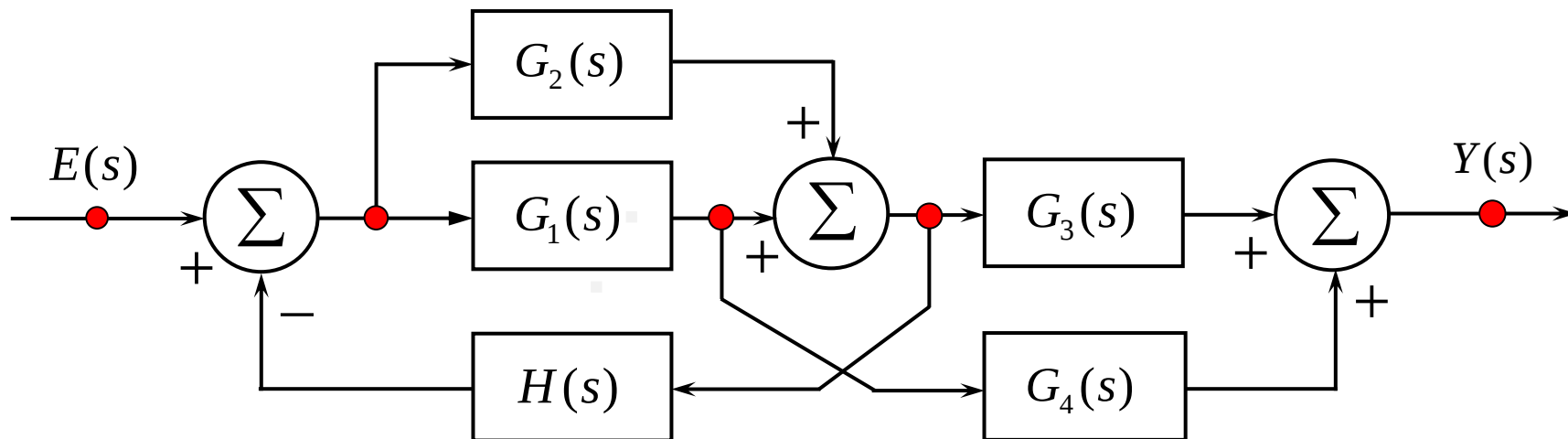
■ 信号流图的基本概念与术语

主要术语



- **自回路**：只有一个结点和一条支路的回路，又称自环，如： $x_5 \xrightarrow{i} x_5$
- **通路（开通路或回路）增益**：通路（开通路或回路）中各支路增益的乘积
- **前向通路**：从源点到汇点的开通路
如： $x_1 \xrightarrow{1} x_3 \xrightarrow{a} x_4 \xrightarrow{b} x_5 \xrightarrow{c} x_6 \xrightarrow{d} x_7$
- **前向通路增益**：前向通路中各支路的增益乘积
如：上图的 $x_1 \xrightarrow{1} x_3 \xrightarrow{a} x_4 \xrightarrow{b} x_5 \xrightarrow{c} x_6 \xrightarrow{d} x_7$ 增益为 $abcd$ 。

■ 信号流图的基本概念与术语



框图中加法器的负号
放至流图的支路增益中

加法器与其输入线上的分
支点需翻译成2个相邻结点
增益为1，但代表不同变量

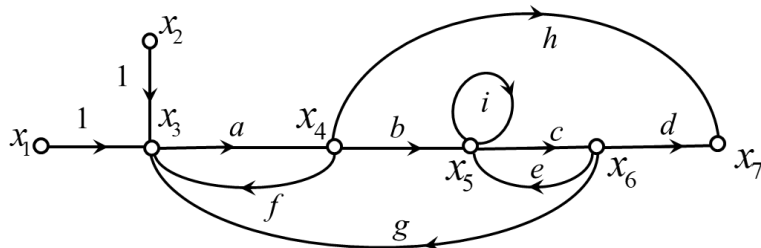
■ 信号流图的性质

- 信号只能沿支路箭头所示方向传输，输出是支路输入与支路增益的乘积；

- 对于多输入的混合结点，将所有输入支路信号相加，和信号就表示该结点变量；从该结点流向各输出支路的信号，均用该节点变量表示；

上述性质表明了一种线性性质，信号流图描述了表征系统的线性代数方程（组），它通过系统微分 / 差分方程（组）经过拉式变换 / z 变换得到。

- 对于具有输入和输出支路的混合结点，可通过增加一个具有增益为1的支路将其变为输出结点；
- 对于某个给定系统，信号流图的形式并不唯一；
- 流图转置（支路方向对调，输入输出结点对调），转移函数不变。



$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 + fx_4 + gx_6 \\ x_4 = ax_3 \\ x_5 = bx_4 + ex_6 + ix_5 \\ x_6 = cx_5 \\ x_7 = hx_4 + dx_6 \end{cases}$$

■ 信号流图的化简规则

➤ 串联支路总增益等于各支路增益乘积

$$x_1 \circ \xrightarrow{a} x_2 \xrightarrow{b} \circ x_3 = x_1 \circ \xrightarrow{a \cdot b} \circ x_3$$

➤ 并联支路的总增益等于各支路增益之和

$$x_1 \circ \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xleftarrow{b} \end{array} \circ x_3 = x_1 \circ \xrightarrow{a+b} \circ x_3$$

➤ 混合结点可以按照图示方式消去；

$$\begin{array}{c} x_1 \circ \xrightarrow{a} \\ \searrow \\ x_2 \circ \xrightarrow{b} \end{array} x_3 \xrightarrow{c} \circ x_4 = \begin{array}{c} x_1 \circ \xrightarrow{ac} \\ \searrow \\ x_2 \circ \xrightarrow{bc} \end{array} \circ x_4$$

➤ 回路以及自环可以按图示方式消去

$$x_1 \circ \xrightarrow{a} x_2 \xrightarrow{b} x_3 \xrightarrow{c} \circ x_3 = x_1 \circ \xrightarrow{ab} x_3 \xrightarrow{bc} \circ x_3 = x_1 \circ \xrightarrow{\frac{ab}{1-bc}} \circ x_3$$

$$x_2 = ax_1 + cx_3 \quad x_3 = bx_2 = b(ax_1 + cx_3) = abx_1 + bcx_3 \quad x_3 = \frac{ab}{1-bc} x_1$$

■ 梅森公式

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_i p_i \Delta_i$$

Δ : 信号流图的特征行列式 i : 由源点到汇点第 i 条前向通路的标号

p_i : 由源点到汇点的第 i 条前向通路的增益

Δ_i : 与第 i 条前向通路不相接触的子图（把涉及前向通路的路径和节点全部挖掉剩下的部分）的特征行列式。

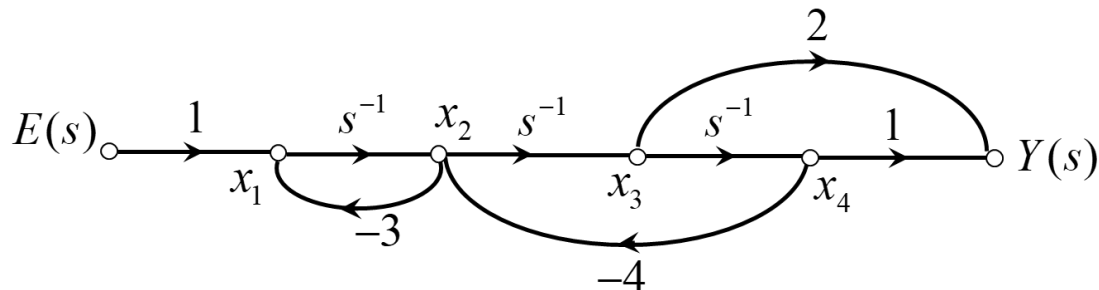
特征行列式的计算 $\Delta = 1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \sum_{p,q,r} L_p L_q L_r + \cdots$

$\sum_j L_j$: 所有不同回路的增益之和

$\sum_{m,n} L_m L_n$: 所有两两不接触回路的增益乘积之和

$\sum_{p,q,r} L_p L_q L_r$: 所有三个都不接触回路的增益乘积之和

例题4 利用梅森公式求解下图信号流图的系统函数 $H(s)$ 。



回路及其增益： $L_1 = -3s^{-1}$ ， $L_2 = -4s^{-2}$ 两个回路互相接触

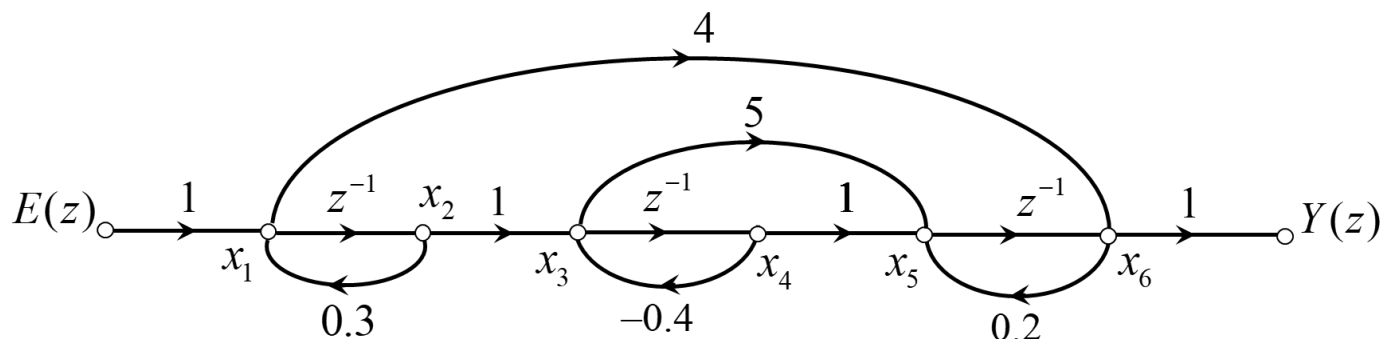
特征行列式： $\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 + 3s^{-1} + 4s^{-2}$

前向通路及其增益： $p_1 = s^{-3}$ ， $p_2 = 2s^{-2}$

子图特征行列式： $\Delta_1 = 1$ ， $\Delta_2 = 1$

系统函数： $H(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_i p_i \Delta_i = \frac{p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{s^{-3} + 2s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 4s^{-2}} = \frac{2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s}$

例题5 利用梅森公式求解下图信号流图的系统函数 $H(z)$ 。



回路及其增益： $L_1 = 0.3z^{-1}$, $L_2 = -0.4z^{-1}$, $L_3 = 0.2z^{-1}$ 三个回路互不接触

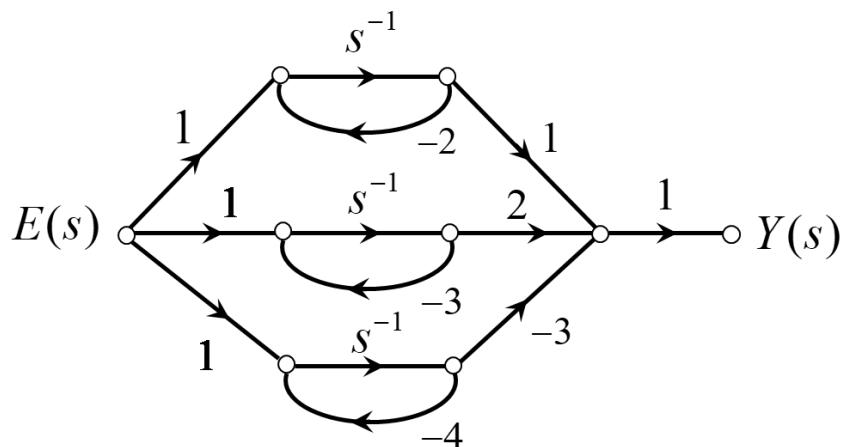
特征行列式： $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1L_2 + L_2L_3 + L_1L_3) - L_1L_2L_3$
 $= 1 - 0.1z^{-1} - 0.14z^{-2} + 0.024z^{-3}$

前向通路及其增益： $p_1 = z^{-3}$, $p_2 = 4$, $p_3 = 5z^{-2}$

子图特征行列式： $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1 - (-0.4z^{-1}) = 1 + 0.4z^{-1}$, $\Delta_3 = 1$

系统函数： $H(z) = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2 + p_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{z^{-3} + 4(1 + 0.4z^{-1}) + 5z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.14z^{-2} + 0.024z^{-3}}$
 $= \frac{z^{-3} + 5z^{-2} + 1.6z^{-1} + 4}{1 - 0.1z^{-1} - 0.14z^{-2} + 0.024z^{-3}} = \frac{4z^3 + 1.6z^2 + 5z + 1}{z^3 - 0.1z^2 - 0.14z + 0.024}$

例题6 利用梅森公式求解下图信号流图的系统函数 $H(s)$ 。



回路及其增益： $L_1 = -2s^{-1}$, $L_2 = -3s^{-1}$, $L_3 = -4s^{-1}$ 三个回路互不接触

特征行列式： $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1L_2 + L_2L_3 + L_1L_3) - L_1L_2L_3 = 1 + 9s^{-1} + 26s^{-2} + 24s^{-3}$

前向通路及其增益： $p_1 = s^{-1}$, $p_2 = 2s^{-1}$, $p_3 = -3s^{-1}$

子图特征行列式：
$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 - (L_2 + L_3) + L_2L_3 = 1 - (-7s^{-1}) + 12s^{-2} = 1 + 7s^{-1} + 12s^{-2} \\ \Delta_2 = 1 - (L_1 + L_3) + L_1L_3 = 1 - (-6s^{-1}) + 8s^{-2} = 1 + 6s^{-1} + 8s^{-2} \\ \Delta_3 = 1 - (L_1 + L_2) + L_1L_2 = 1 - (-5s^{-1}) + 6s^{-2} = 1 + 5s^{-1} + 6s^{-2} \end{cases}$$

系统函数：
$$H(s) = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2 + p_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{4s^{-2} + 10s^{-3}}{1 + 9s^{-1} + 26s^{-2} + 24s^{-3}} = \frac{4s + 10}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

信号与系统

第8章 系统的状态变量分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第8章 系统的状态变量分析

8.1 状态变量与状态方程

8.2 连续系统状态方程的建立

8.3 离散系统状态方程的建立

8.4 状态方程的变换域求解

8.5 系统的可控制性和可观测性

8.1 状态变量与状态方程

状态变量分析法概述

连续系统状态方程与输出方程

离散系统状态方程与输出方程

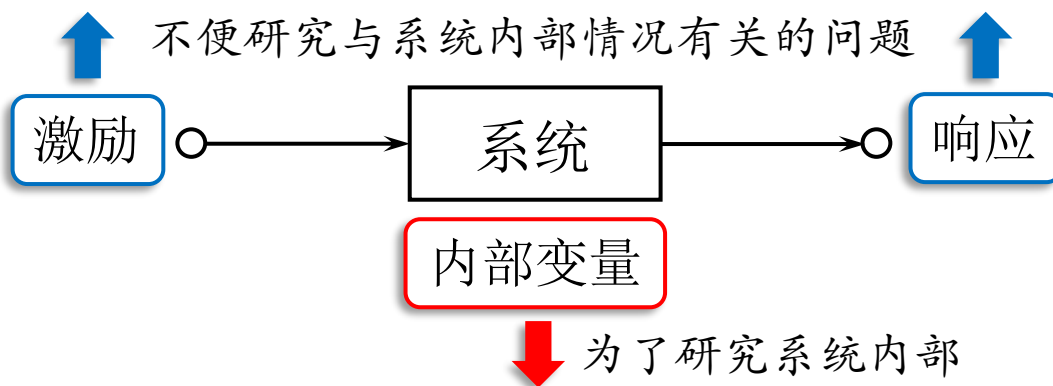
状态方程与输出方程的一般形式

■ 状态变量分析法概述

系统分析的两类方法：输入-输出分析法、状态变量分析法。

➤ 输入-输出分析法

着眼于系统的输入和输出（激励与响应）关系，只关心系统输入端和输出端的变量，不研究系统的内部变量。



➤ 状态变量分析法

现代控制理论的发展对研究系统内部变量提出了要求，加之系统的日益复杂化，以分析内部变量为基础的状态变量分析法应运而生。

■ 状态变量分析法概述

状态变量分析法的特点

- 状态变量分析法**提供系统的内部信息**，能够比较容易地解决与系统内部情况有关的分析设计问题；
- 从数学模型来看，输入-输出法用一个 **n 阶微分/差分方程**描述 n 阶系统，变量只限于输出、输入两个变量；而状态变量法则用**一组一阶微分/差分方程**表征 n 阶系统，为方程中变量的选择带来了极大的灵活性，并为从不同角度反映系统内部状态提供了可能；
- 状态变量分析法不仅**适用于线性时不变、单输入单输出系统**，也**适用于非线性时变、随机、多输入多输出系统分析**；
- 状态变量分析法规律性更强，便于通过计算机分析复杂系统。

■ 连续系统状态方程与输出方程

初始状态

连续系统在 t_0 时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间 $[t_0, t]$ 上的输入，就可以完全确定系统在 t 时刻的输出，这组数就是初始状态，表示如下：

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)$$

- 电路中初始时刻 t_0 的状态通常指电容电压 $u_C(t_0)$ 和电感电流 $i_L(t_0)$ 。
- 系统状态的数目是一定的， n 阶系统有 n 个初始状态，但状态的选择并不唯一。

■ 连续系统状态方程与输出方程

状态变量 表示状态随时间变化的一组相互独立的变量。

初始状态 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$

状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

状态矢量

状态矢量 由状态变量构成的列矢量 $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

■ 连续系统状态方程与输出方程

状态方程 描述系统状态与输入关系的一阶微分方程组

对 n 阶连续系统，状态方程是由 n 个一阶微分方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

p 个输入 $e_1(t), e_2(t), \dots, e_p(t)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}e_1(t) + b_{12}e_2(t) + \dots + b_{1p}e_p(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}e_1(t) + b_{22}e_2(t) + \dots + b_{2p}e_p(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}e_1(t) + b_{n2}e_2(t) + \dots + b_{np}e_p(t) \end{cases}$$

其中： $\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)$

■ 连续系统状态方程与输出方程

状态方程 状态方程的矩阵形式: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = [x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t)]^T & \text{状态矢量} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = [\dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \cdots & \dot{x}_n(t)]^T & \text{状态一阶导数的矢量} \\ \mathbf{e}(t) = [e_1(t) & e_2(t) & \cdots & e_p(t)]^T & \text{激励（输入）矢量} \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n} \quad \text{系统矩阵}$$

$$\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times p} \quad \text{控制矩阵}$$

■ 连续系统状态方程与输出方程

输出方程 描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组

若 n 阶系统有 q 个输出，输出方程是由 q 个代数方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

p 个输入 $e_1(t), e_2(t), \dots, e_p(t)$

q 个输出 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}e_1(t) + d_{12}e_2(t) + \dots + d_{1p}e_p(t) \\ y_2(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}e_1(t) + d_{22}e_2(t) + \dots + d_{2p}e_p(t) \\ \vdots \\ y_q(t) = c_{q1}x_1(t) + c_{q2}x_2(t) + \dots + c_{qn}x_n(t) + d_{q1}e_1(t) + d_{q2}e_2(t) + \dots + d_{qp}e_p(t) \end{cases}$$

■ 连续系统状态方程与输出方程

输出方程 输出方程的矩阵形式: $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t)$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_q(t)]^T & \text{输出矢量} \\ \mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T & \text{状态矢量} \\ \mathbf{e}(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \cdots \ e_p(t)]^T & \text{激励（输入）矢量} \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = [c_{ij}]_{q \times n} \quad \text{输出矩阵}$$

$$\mathbf{D} = [d_{ij}]_{q \times p} \quad \text{直达矩阵}$$

■ 离散系统状态方程与输出方程

初始状态

离散系统在 k_0 时刻的状态是最少数目的一组数，知道了这组数和区间 $[k_0, k]$ 上的输入，就可以完全确定系统在 k 时刻的输出，这组数就是初始状态，表示如下：

$$x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0)$$

- 系统状态的数目是一定的， n 阶系统有 n 个初始状态，但状态的选择并不唯一。

■ 离散系统状态方程与输出方程

状态变量 表示状态随时间变化的一组相互独立的变量。

初始状态 $x_1(k_0), x_2(k_0), \dots, x_n(k_0)$

状态变量 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$

状态矢量

状态矢量 由状态变量构成的列矢量 $\mathbf{x}(k)$

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \dots \quad x_n(k)]^T = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

■ 离散系统状态方程与输出方程

状态方程 描述系统状态与输入关系的一阶前向差分方程组

对 n 阶离散系统，状态方程是由 n 个一阶差分方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$

p 个输入 $e_1(k), e_2(k), \dots, e_p(k)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ \vdots \\ e_p(k) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(k+1) \qquad \mathbf{A} \qquad \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{B} \qquad \mathbf{e}(k)$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k)$$

■ 离散系统状态方程与输出方程

输出方程 描述系统输出、输入、状态之间关系的代数方程组

若 n 阶系统有 q 个输出，输出方程是由 q 个代数方程组成的方程组。

n 阶系统有 n 个状态 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$

p 个输入 $e_1(k), e_2(k), \dots, e_p(k)$

q 个输出 $y_1(k), y_2(k), \dots, y_q(k)$

则状态方程的一般形式为：

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ \vdots \\ e_p(k) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}(k) \qquad \mathbf{C} \qquad \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{D} \qquad \mathbf{e}(k)$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k)$$

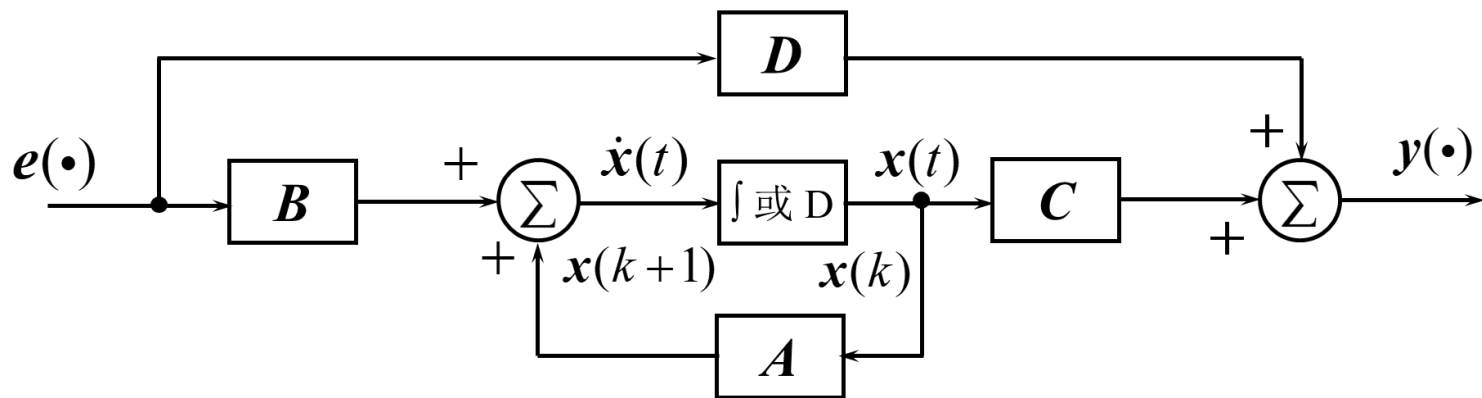
■ 状态方程与输出方程的一般形式

连续系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \end{cases}$$

离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k) \end{cases}$$



8.2 连续系统状态方程的建立

由RLC电路建立状态方程

由微分方程建立状态方程

由框图/流图建立状态方程

由系统函数建立状态方程

■ 连续系统状态方程的建立

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \end{cases}$$

状态方程 $\dot{\mathbf{x}}(t) \sim \mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t)$

刻画状态变量的一阶导数与状态变量、系统输入的关系。

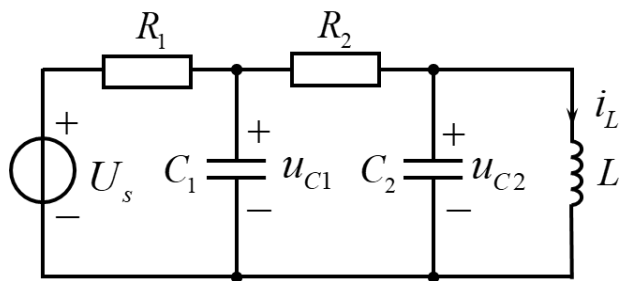
输出方程 $\mathbf{y}(t) \sim \mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t)$

刻画输出变量与状态变量、系统输入的关系。

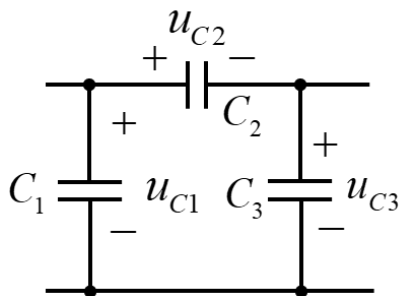
步骤：选取状态变量、列状态方程、列输出方程

■ 由RLC电路建立状态方程

状态变量的选取：独立的电容电压和电感电流。



状态变量： u_{C1} , u_{C2} , i_L



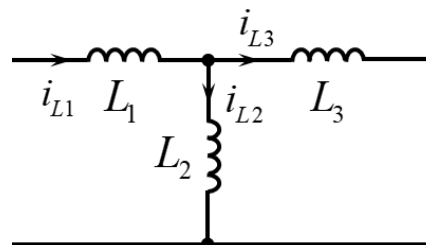
$$u_{C1} + u_{C2} + u_{C3} = 0$$

状态变量：

u_{C1} , u_{C2} 或 u_{C2} , u_{C3} 或 u_{C1} , u_{C3}

u_{C1} , u_{C2} , u_{C3} 只有两个独立变量

任意两个变量可以表示第3个



$$i_{L1} = i_{L2} + i_{L3}$$

状态变量：

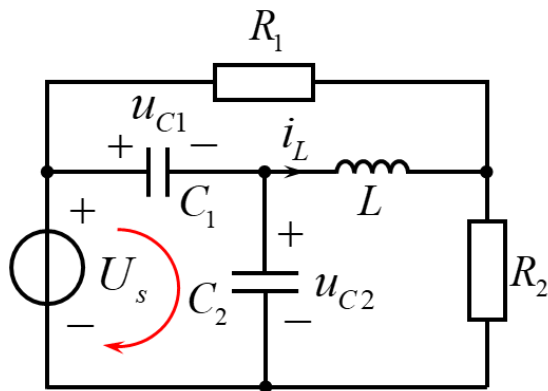
i_{L1} , i_{L2} 或 i_{L2} , i_{L3} 或 i_{L1} , i_{L3}

i_{L1} , i_{L2} , i_{L3} 只有两个独立变量

任意两个变量可以表示第3个

■ 由RLC电路建立状态方程

状态变量的选取：独立的电容电压和电感电流。



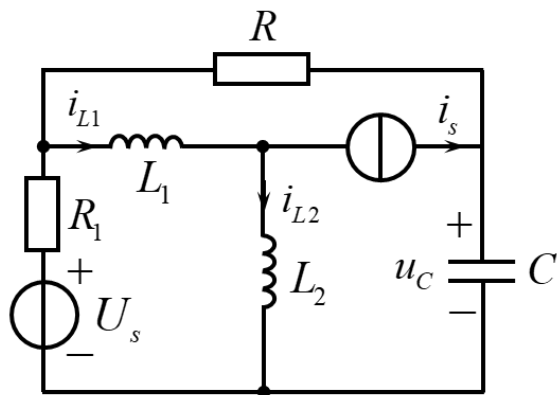
状态变量：

$$u_{C1}, i_L \text{ 或 } u_{C2}, i_L$$

u_{C1}, u_{C2} 只有一个独立变量

$$u_{C1} + u_{C2} = U_s$$

电路中有3个动态原件，但是是一个2阶系统



状态变量：

$$i_{L1}, u_C \text{ 或 } i_{L2}, u_C$$

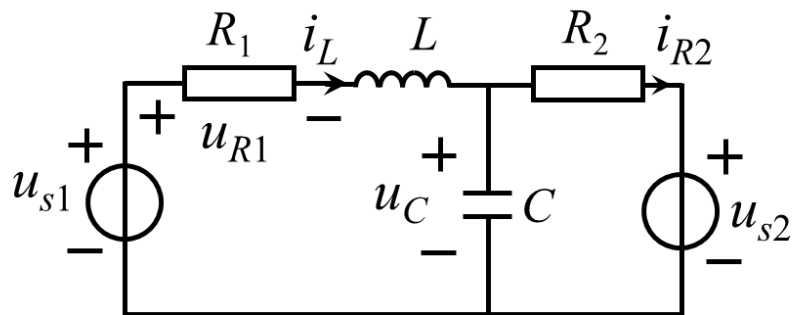
i_{L1}, i_{L2} 只有一个独立变量

$$i_{L1} = i_s + i_{L2}$$

电路中有3个动态原件，但是是一个2阶系统

■ 由RLC电路建立状态方程

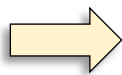
例题1



状态变量 $x_1 = i_L, x_2 = u_C$

输出变量 $y_1 = u_{R1}, y_2 = i_{R2}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_{s1} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2C}x_2 + \frac{1}{R_2C}u_{s2} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix}$$

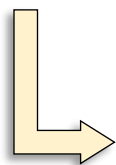
列状态方程

1. 对电感电压列KVL方程:

$$L \frac{d}{dt} i_L(t) + R_1 i_L(t) + u_C(t) = u_{s1}(t)$$

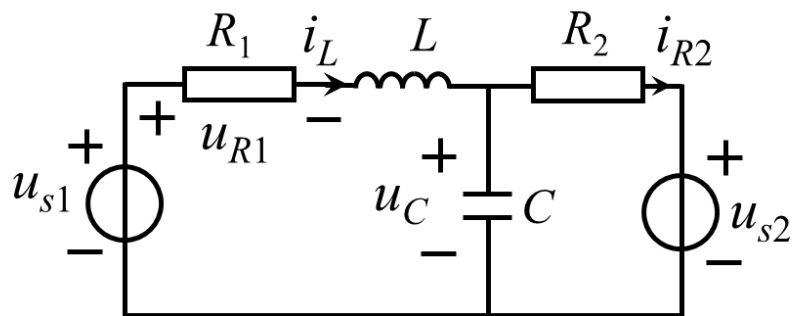
2. 对电容电流列KCL方程:

$$C \frac{d}{dt} u_C(t) + i_{R2}(t) = i_L(t) \quad i_{R2} = \frac{x_2 - u_{s2}}{R_2}$$



■ 由RLC电路建立状态方程

例题1



列输出方程

$$\begin{cases} y_1 = u_{R1} = R_1 i_L = R_1 x_1 \\ y_2 = i_{R2} = \frac{x_2 - u_{s2}}{R_2} \end{cases}$$



状态变量 $x_1 = i_L, x_2 = u_C$

输出变量 $y_1 = u_{R1}, y_2 = i_{R2}$

$$\begin{cases} y_1 = R_1 x_1 \\ y_2 = \frac{1}{R_2} x_2 - \frac{1}{R_2} u_{s2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix}$$

■ 由微分方程建立状态方程

n 阶微分方程 $\rightarrow n$ 个1阶微分方程组成的方程组

例题2 建立下列LTI系统的状态方程和输出方程。

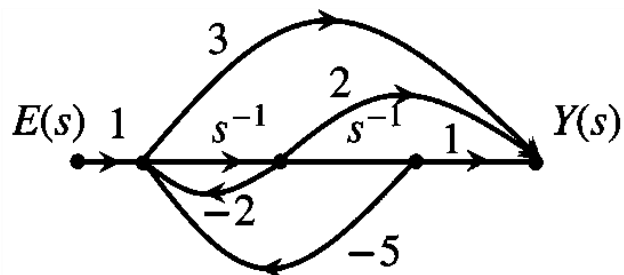
1) $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e(t)$

2) $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 6e''(t) + 3e'(t) + 4e(t)$

■ 由框图/流图建立状态方程

- 1) 选积分器 s^{-1} 的输出为状态变量；
- 2) 根据积分器的输入输出关系列写状态方程（输入为输出端求导，可导出状态变量）；
- 3) 根据流图/框图的输出端列写输出方程。

例题3 建立图示LTI系统的状态方程和输出方程。



■ 由系统函数建立状态方程

给定系统函数，可以转化为微分方程、信号流图以及系统框图进行状态变量分析。

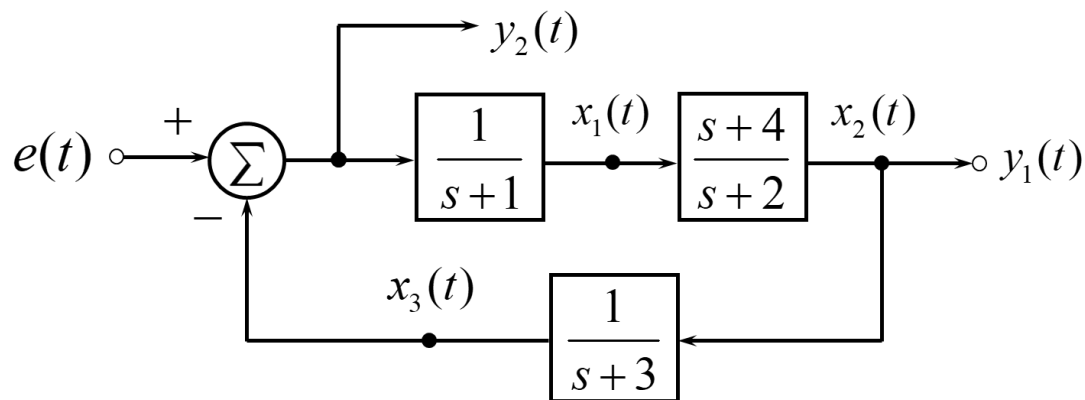
例题4

某LTI连续系统的系统函数为 $H(s) = \frac{2s+8}{s^2+3s+2}$ ，建立它的状态方程和输出方程。

■ 由系统函数建立状态方程

例题5

已知某系统框图如图，状态变量如图所示，试列出其状态方程和输出方程。



8.3 离散系统状态方程的建立

由差分方程建立状态方程

由框图/流图建立状态方程

由系统函数建立状态方程

■ 离散系统状态方程的建立

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k) \end{cases}$$

状态方程 $\mathbf{x}(k+1) \sim \mathbf{x}(k), \mathbf{e}(k)$

刻画状态变量的单位左移与状态变量、系统输入的关系。

输出方程 $\mathbf{y}(k) \sim \mathbf{x}(k), \mathbf{e}(k)$

刻画输出变量与状态变量、系统输入的关系。

步骤：选取状态变量、列状态方程、列输出方程

■ 由差分方程建立状态方程

n 阶差分方程 $\rightarrow n$ 个1阶差分方程组成的方程组

例题6 建立下列LTI系统的状态方程和输出方程。

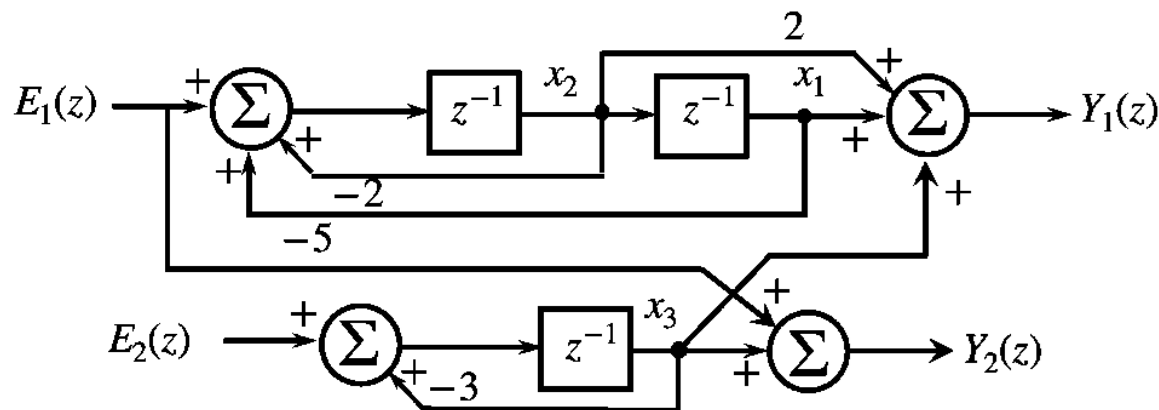
1) $y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) + 5y(k-3) = e(k)$

2) $y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) + 5y(k-3) = 6e(k-1) + 3e(k-2)$

■ 由框图/流图建立状态方程

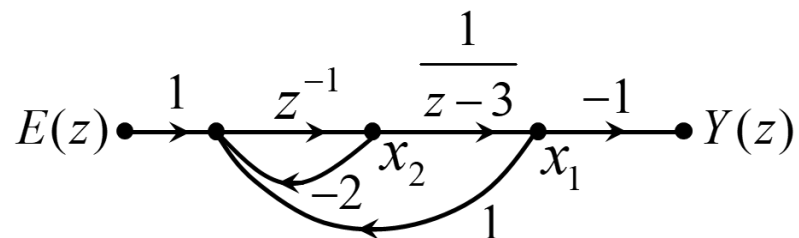
- 1) 选延时单元 z^{-1} 的输出为状态变量；
- 2) 根据每个延时单元的输入输出关系列写状态方程（输入端为输出端的左移，可导出状态变量）；
- 3) 根据流图/框图的输出端列写输出方程。

例题7 建立图示LTI系统的状态方程和输出方程。



■ 由框图/流图建立状态方程

例题8 某LTI离散系统的流图如下，建立其状态方程和输出方程。



■ 由系统函数建立状态方程

给定系统函数，可以转化为差分方程、信号流图以及系统框图进行状态变量分析。

例题9 某LTI离散系统的系统函数为 $H(z) = \frac{9z^3 - 6z^2 + z}{(z - 0.5)^2(z - 0.25)}$ ，用数目最小的延时单元构成此系统，并求解它的状态方程和输出方程。

8.4 状态方程的变换域求解

连续系统状态方程的 s 域求解

离散系统状态方程的 z 域求解

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统的状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t)$$

对方程两端取拉普拉斯变换，结合微分性质：

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0_-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{E}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0_-) + \mathbf{B}\mathbf{E}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0_-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{E}(s)$$

定义预解矩阵

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$= \underbrace{\Phi(s)\mathbf{x}(0_-)}_{\mathbf{X}_{zi}(s)} + \underbrace{\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{E}(s)}_{\mathbf{X}_{zs}(s)}$$

可得状态变量： $\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}_{zi}(t)] + \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}_{zs}(t)]$

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统的输出方程为：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t)$$

对方程两端取拉普拉斯变换：

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{E}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0_-) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{E}(s) \quad \Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0_-) + \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{E}(s)$$

$$= \underline{\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{x}(0_-)} + \underline{\left[\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{E}(s)}$$

$$\mathbf{Y}_{zi}(s) \quad \mathbf{Y}_{zs}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{E}(s)$$

系统函数矩阵 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathcal{L}[\mathbf{h}(t)]$

可得系统输出： $\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}_{zi}(t)] + \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}_{zs}(t)]$

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统系统函数矩阵与稳定性分析 $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{D}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

不难发现预解矩阵的极点就是系统函数矩阵的极点。

- 当特征方程 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ 的根，即系统极点均位于 s 左开半平面时，连续系统稳定。
- 对 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 列罗斯阵列，当多项式满足罗斯准则时系统稳定。
- 当系统函数矩阵在虚轴上收敛时，系统的频率响应矩阵为

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{H}(s)\big|_{s=j\omega} = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

■ 连续系统状态方程的 s 域求解

LTI连续系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \end{cases}$$

预解矩阵

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

状态矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}_{zi}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0_-)} \\ \underline{\mathbf{X}_{zs}(s) = \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{E}(s)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(s)$ 无关, 和 $\mathbf{x}(0_-)$ 有关

输出矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{Y}_{zi}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{x}(0_-)} \\ \underline{\mathbf{Y}_{zs}(s) = [\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{E}(s)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(s)$ 有关, 和 $\mathbf{x}(0_-)$ 无关

系统函数矩阵

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

■ 基础知识复习：方阵的逆矩阵求解

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$$

伴随矩阵
行列式

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

余子式 M_{ij}

矩阵 $\mathbf{A}$ 中删除第 i 行第 j 列元素后所得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式。

二阶方阵的逆：两调一除

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

主对角元素互换，副对角元素变号，除以行列式。

例题10

已知系统方程如下，初始状态 $x_1(0_-)=3, x_2(0_-)=2$ ，输入 $e(t)=\delta(t)$ ，求解系统的预解矩阵、状态变量和输出，并判断系统是否稳定。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + e(t)$$

解： $\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$

$$X(s) = \Phi(s)[x(0_-) + BE(s)] = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \right\} = \begin{bmatrix} \frac{3s+18}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{3s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{12}{s+2} - \frac{9}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{9}{s+3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

系统极点： $s_1 = -2, s_2 = -3$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12e^{-2t} - 9e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix} \varepsilon(t) + \delta(t) = 6e^{-2t} \varepsilon(t) + \delta(t)$$

均位于 s 平面左半平面，
系统稳定

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统的状态方程为：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k)$$

对方程两端取 z 变换，结合移位性质：

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{E}(z)$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{E}(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{E}(z)$$

定义预解矩阵

$$\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z$$

$$= \underbrace{\Phi(z)\mathbf{x}(0)}_{\mathbf{X}_{zi}(z)} + \underbrace{\Phi(z)z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z)}_{\mathbf{X}_{zs}(z)}$$

$$\text{可得状态变量: } \mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}_{zi}(z)] + \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}_{zs}(z)]$$

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统的输出方程为：

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k)$$

对方程两端取拉普拉斯变换：

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{E}(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = \boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(z)z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z) \quad \boldsymbol{\Phi}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{E}(z)$$

$$= \underbrace{\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{x}(0)}_{\mathbf{Y}_{zi}(z)} + \underbrace{\left[\mathbf{C}z^{-1}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{E}(z)}_{\mathbf{Y}_{zs}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{E}(z)}$$

系统函数矩阵 $\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}z^{-1}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathcal{Z}[\mathbf{h}(k)]$

可得系统输出： $\mathbf{y}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{Y}(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{Y}_{zi}(k)] + \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{Y}_{zs}(k)]$

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统系统函数矩阵与稳定性分析 $\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z = z \frac{\text{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)}$

$$H(z) = Cz^{-1}\Phi(z)B + D = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$H(z) = Cz^{-1}\Phi(z)B + D = \frac{C \text{adj}(zI - A)B + \det(zI - A)D}{\det(zI - A)}$$

预解矩阵的极点同样是系统函数矩阵的极点。

- 当特征方程 $\det(zI - A) = 0$ 的根，即系统极点均位于 z 平面单位圆内部时，离散系统稳定。
- 对 $\det(zI - A)$ 列朱里表，当多项式满足朱里准则时系统稳定。
- 当系统函数矩阵在单位圆上收敛时，系统的频率响应矩阵为

$$H(e^{j\theta}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\theta}} = C(e^{j\theta}I - A)^{-1}B + D$$

■ 离散系统状态方程的 z 域求解

LTI离散系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{e}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{e}(k) \end{cases}$$

预解矩阵

$$\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$$

状态矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{X}_{zi}(z) = \Phi(z)\mathbf{x}(0)} \\ \underline{\mathbf{X}_{zs}(z) = \Phi(z)z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(z)$ 无关, 和 $\mathbf{x}(0)$ 有关

输出矢量

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{Y}_{zi}(z) = \mathbf{C}\Phi(z)\mathbf{x}(0)} \\ \underline{\mathbf{Y}_{zs}(z) = [\mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{E}(z)} \end{cases}$$

和 $\mathbf{E}(z)$ 有关, 和 $\mathbf{x}(0)$ 无关

系统函数矩阵

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}z^{-1}\Phi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

例题11 已知某离散因果系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k), \quad \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

初始状态 $x_1(0)=1, x_2(0)=2$ ，输入 $e(k)=\varepsilon(k)$ ，求状态变量和输出。

解： $\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}^{-1}z = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}z$

$$\mathbf{X}(z) = \Phi(z) \left[\mathbf{x}(0) + z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}(z) \right] = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z^2-5z & z \\ -6z & z^2 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z(z-2)}{(z-1)(z-3)} \\ \frac{z(2z-3)}{(z-1)(z-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-3} \\ \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{3}{2} \frac{z}{z-3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+3^k] \\ \frac{1}{2}[1+3^{k+1}] \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+3^k] \\ \frac{1}{2}[1+3^{k+1}] \end{bmatrix} \varepsilon(k) = \begin{bmatrix} 1+2 \cdot 3^k \\ \frac{1}{2}[1-3^k] \end{bmatrix} \varepsilon(k)$$

8.5 系统的可控制性和可观测性

控制和观测的概念

系统的可控制性

系统的可观测性

■ 控制和观测的概念

在经典理论中，采用输入-输出法表述系统，即输出量通过微分方程或者差分方程直接与输入量相联系。此时，输出量被观测，且输出量受输入量控制。

在状态变量分析中，我们关心的是系统内部各状态变量的变化与输入之间的关系，即状态变量受系统输入控制，以及能够根据输出的观测值确定出系统的任一状态，即观测输出量来确定系统状态。这就是现代控制理论中的两个基本问题：系统的可控制性（Controllability）与可观测性（Observability）。

■ 系统的可控制性（Controllability）

状态的可控制性

系统在某种初始状态下，通过施加输入控制，使系统经过一段时间后在任意指定时刻的状态为零状态，则称该初始状态为系统的可控状态。

系统的可控制性

系统所有的可控制状态组成可控制状态空间，所有不可控制状态组成不可控制状态空间。分为完全可控制系统，部分可控制系统以及完全不可控制系统。为了简便处理，系统完全可控时，系统才可控。

系统的可控制性反映了输入对于系统内部状态的控制能力。

■ 系统的可控制性（Controllability）

系统可控的含义

通过一定的激励，系统可以从任意的初始状态（不一定是零状态）过渡到任意的另一个状态。

系统可控的判定

常用可控制性矩阵来判定系统的可控制性。

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

系统可控的充要条件：可控性矩阵满秩，即 $\text{rank}[\mathbf{M}_C] = n$

■ 系统的可观测性 (Observability)

系统的可观测性

当系统用状态方程描述时，根据系统的输出唯一确定系统所有初始状态，则称系统完全可观测；若只能确定一部分状态，那么系统不完全可观测。

系统的可观测性指的是由系统的输出量来确定系统状态的能力。

系统可观测的判定

常用可观测性矩阵来判定系统的可观测性。

系统可控的充要条件：可控性矩阵满秩，即

$$\text{rank}[M_O] = n$$

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

例题12 给定两个连续系统a、b，其状态方程与输出方程分别为

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a1}(t) \\ x_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{a1}(t) \\ x_{a2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_b(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b1}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t), \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b1}(t) \\ x_{b2}(t) \end{bmatrix}$$

试讨论这两个系统的可观测性与可控制性。

$$\text{a系统: } \mathbf{M}_C = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b系统: } \mathbf{M}_C = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可观、可控

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

不可观、不可控

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

课程结束，谢谢

点赞



投币



收藏



信号与系统

Signals and Systems

主讲人：张锦皓Roger

课件制作：张锦皓Roger

